ZARZECKI — UWAGI METODYCZNE

Szanownemu Prof. S. Dicksteinowi od autora

UWAGI METODYCZNE O NAUCZANIU ARYTMETYKI POCZĄTKOWEJ.

Druk. Art. K. Kopytowski i S-ka, Warszawa, Nowy Świat 47. Telefon 35-80.

KSIĄŻNICA WYCHOWAWCZA
№ 6.

L. ZARZECKI.

Uwagi metodyczne o nauczaniu Arytmetyki Początkowej

WYDAWNICTWO IMIENIA STASZYCA
STARANIEM STOWARZYSZENIA NAUCZYCIELSTWA POLSKIEGO.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA.
WARSZAWA 1911.

Przedmowa.

Opracowanie tej książki nasuwało mi wiele trudności. Jedną z głównych trudności było pogodzenie teoryi z praktycznością. Zarówno przedstawienie głównych bodaj prądów w teoryi nauczania arytmetyki początkowej i wyjaśnienie własnego wobec nich stanowiska autora, jak opracowanie praktycznego przewodnika w nauczaniu wymagałyby każde z osobna dzieła o daleko większych rozmiarach, niż to wypadało z planu całego wydawnictwa, którem się opiekuje Stowarzyszenie Nauczycielstwa Polskiego i do którego jako cząstka należy książeczka niniejsza. Trzeba było wybrać drogę kompromisową: nie zapominać o zagadnieniach teoretycznych, a jednocześnie nie odrywać się zbytnio od praktyki nauczania. Czy rzecz ta udała się autorowi, nie on może wyrokować; w każdym razie nie rok ani dwa nad temi sprawami myślał i dużo energii w to włożył. Autor zdaje sobie dokładnie sprawę, że książeczka ta nie porusza wielu zagadnień, że inne traktuje często szkicowo; ale też uwagi metodyczne nie są metodyką szczegółową. Czytelnik kompetentny osądzi, co w niej jest oryginalnego, a ten, który studya nad

przedmiotem stanowiącym jej treść zaczyna, znaleźć jednakże może, jak to sobie tuszę, wyraźne postawienie głównych zagadnień. Jeżeli odczytanie poniżej następujących kartek potrafi wzbudzić zainteresowanie sprawą nauczania początków arytmetyki, już nie napróżno je napisałem.

ROZDZIAŁ I.

Arytmetyka obecnie należy do głównych przedmiotów nauczania w szkole elementarnej i średniej. Przyczyny tego zjawiska, w pierwszym rzędzie praktyczne, są dostatecznie zrozumiałe. Niemałą rolę również odegrały wyrobione sposoby rachunku, wykonywania działań, które zastąpiły dawne zmudne metody mechaniczne. Oddawna już, a szczególniej od czasów Pestalozzego, przez cały wiek XIX usilnie pracowano nad metodą nauczania początkowej arytmetyki, a literatura tej gałęzi dydaktyki w tym czasie wzrosła imponująco. Dużo zrobiono już w tej dziedzinie, a z całą pewnością zaznaczyć należy, iż główny impuls do pracy dało powstanie szkoły ludowej, demokratyzacya oświaty. Rozszerzony dzięki temu teren doświadczenia, rozrastające się potrzeby wpłynęły ogromnie na praktykę nauczania, na ustalenie pewnych sposobów traktowania rzeczy; ale jeśli obecnie w porównaniu z wiekiem XVII zrobiliśmy bardzo duży krok naprzód w tej właśnie praktyce nauczania, to podwaliny teoryi metodyki są jednakże chwiejne i nieraz zgoła niejasne.

Dla każdego chyba jest zrozumiałe, że zdawanie sobie sprawy z tych elementarnych procesów myśli, z tych pojęć, na których opiera się gmach arytmetyki, jest kwestyą nie tylko ciekawą dla teoretyka, ale i ważną dla praktyka. Stąd nieustanne poszukiwania w tej dziedzinie, ciągła praca zarówno pedagogów z zawodu, jak filozofów i matematyków-specyalistów. Najgłówniejszą jakością elementarną, na której

opiera się arytmetyka, jest sama liczba całkowita, czyli t. zw. naturalna. Czem jest ta liczba? W pytaniu tem schodzą się drogi (jak zresztą w wielu innych miejscach) niezależnego badania naukowego i potrzeby praktyki nauczania. Dość zajrzeć do wielu dzieł, szczególnie w literaturze niemieckiej, poświęconych specyalnie nauczaniu początków arytmetyki, aby się przekonać, że każdy autor przedewszystkiem zwraca uwagę na to pytanie.

Byłoby nie na miejscu tutaj zastanawiać się nad różnemi teoryami o pochodzeniu i jakości pojęcia liczby. Takie badania zaprowadziłyby nas zbyt daleko od tych kwestyi praktycznych, z jakiemi związane jest nauczanie, od tego celu skromnego, jaki postawiliśmy sobie w tej książeczce. Postaramy się jednakże zwrócić tu uwagę na niektóre ważne punkty, związane blizko z powstawaniem pojęcia liczby.

Gdy liczymy pewne dane przedmioty konkretne, przechodzimy od jednego przedmiotu do drugiego w pewnej kolei. Aby taką kolejność wytworzyć, potrzeba pewnego wysiłku zarówno wyobraźni jak uwagi. Łatwo to zrozumiemy, jeżeli zechcemy dla sprawdzenia przeliczyć faktycznie pewną grupę przedmiotów, np. grupę drzew w danym gaju niewielkim. Im więcej jest przedmiotów do przeliczenia, tem większe są trudności, gdyż trudniej jest wtedy pewien porządek, kolejność w rozpatrywanych przedmiotach utworzyć. Pomagamy sobie, dzieląc dane przedmioty na oddzielne grupy, łatwe do spamiętania, albo też specyalnie przez nas mechanicznie śród przedmiotów wytworzone. Jeżeli zechcemy obserwować osoby liczące, bez trudności zaobserwujemy fakt, że w takich razach najczęściej liczą one dwójkami (parami), trójkami, rzadziej czwórkami, a jeszcze rzadziej piątkami. Takie niewielkie grupy przedmiotów chwytamy liczbowo jakby jednym rzutem oka i tem łatwiej to robimy, im odpowiedniejsze są po temu warunki, w jakich przedmioty są dane; rzecz bowiem dużo zależy od odległości przedmiotów, od ich położenia. Np. gdy przedmioty znajdują się w większej liczbie i bardzo blizko jeden od drugiego, albo też bardzo daleko, wtedy trudniej chwytać owe pary i trójki jednym rzutem

oka, bo w pierwszym przypadku mozolnie musimy oddzielać jedną trójkę od drugiej, wysilać uwagę, w drugim gałka oczna musi wykonać pewien ruch, by od jednego przedmiotu przejść do drugiego, gdyż fiksacya, czyli ustawienie danego przedmiotu w jasnem polu widzenia może być zrobione dla stosunkowo niewielkiej grupy przedmiotów i zależy również od odległości oka od tych przedmiotów. Wobec tego bardzo ważne jest, by narzędzia poglądowe przy nauczaniu arytmetyki były ustawione w klasie na odpowiedniej odległości, miały określoną, zależną od warunków wielkość. Zdarzyło mi się np. widzieć w jednej z klas szkoły elementarnej liczydło (szczoty) ustawione tak, że na niem nie usunięto niepotrzebnych gałek, przez co liczona grupa gałek nie mogła być dla wszystkich uczniów wyraźna, a samo liczydło było zbyt blizko do ławek przysunięte. Są to rzeczy, któremi nie można pogardzać w nauczaniu.

Liczymy jednak nie tylko przedmioty konkretne, dane nam w polu widzenia, lecz i oddzielne powtarzające się dźwięki, np. uderzenia zegara, spadające powolnie krople wody i t. p. Liczyć możemy również oddzielne dotknięcia do powierzchni naszego ciała, oddzielne ruchy wykonywane przez nas samych. Czy możemy w tych razach z równą, jak poprzednio, łatwością ujmować te wrażenia grupami po dwa, po trzy i t. p.? Otóż tu skonstatować należy dużą i *ważną* różnicę. W polu widzenia dane mamy przedmioty jednocześnie, tu następują po sobie kolejno; tam możemy wracać do przeliczanych powtórnie i sprawdzać rachunek, tu tego zrobić nie możemy. Ale i wzrokiem możemy ujmować zjawiska, np. gdy obserwujemy ruchy wahadła zegarowego. Jedno wahnięcie mija i nie powtórzy się; a więc nieudolny rachmistrz nigdy nie ma pewności, czy dobrze porachował, jeżeli nie jest obeznany z jakiemi innemi metodami sprawdzania swego rachunku.

Z powyższego wynika, że liczymy przeważnie dwa rodzaje przedmiotów: 1-o takie, które są nam dane jednocześnie w przestrzeni, 2-o takie, które następują po sobie w czasie. Liczenie pierwszych jest jakby wygodniejsze, bo może-

my bezpośrednio, powtórnie przeliczając, sprawdzić nasze liczenie. Na tem między innemi przyczynami polega wartość t. zw. środków pomocniczych do poglądowego nauczania arytmetyki początkowej. Środki te mają jeszcze inne znaczenie, o czem później. Ta własność specyalna przedmiotów pierwszego rodzaju jest zarazem powodem, dla którego wiele ludzi sądzi, że samo pojęcie liczby powstało z doświadczenia przez obserwowanie takich przedmiotów. Gdyby takie rozumienie rzeczy nie szkodziło przy nauczaniu, możnaby zupełnie nie zwracać na nie uwagi; ale nieraz może to być szkodliwe. Taki pogląd jest bardzo podobny do tego, jak gdyby kto, widząc, że ławka w izbie pomaga dzieciom przy nauce chodzenia, wyprowadził wniosek, że niektóre przedmioty zewnętrzne uczą dzieci chodzić. Zaznaczyliśmy powyżej, że licząc dane przedmioty, tem samem zaprowadzamy śród nich pewien porządek, ład. Otóż gdy liczymy, pojedyńczo biorąc przedmioty, czy też parami lub trójkami, łatwo zaobserwować, że porządek, jaki wybraliśmy, wcale nie wpływa na rezultat, jeżeli rachunek był dobrze wykonany. Np. gdybyśmy przeliczali 12 przedmiotów pojedyńczo, to takie uporządkowanie można utworzyć tyloma sposobami, ile jest jedności w iloczynie: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12; gdyby przedmiotów było 5, to uporządkowań różnych będzie: 1. 2. 3. 4. 5 i t. d. Przy wszelkiem takiem uporządkowaniu rezultat liczenia będzie ten sam, otrzymana liczba będzie taka sama, a więc l i c z b a n i e z a l e ż y o d u p o r z ą d k o w a n i a. Ale gdyby nam chodziło nie o kolejne liczenie, lecz o d o r a ź n e odczytywanie z danej grupy przedmiotów odpowiadającej im liczby, wtedy zestawienie tych przedmiotów musi być, jakeśmy to zaznaczyli, mniej lub więcej wygodne. Możnaby zadać sobie pytanie, jakie ustawienie przedmiotów byłoby najwygodniejsze do doraźnego odczytywania z nich liczby. Wykonywano nawet w tym celu różne doświadczenia z dziećmi. Z drugiej strony wiemy, że doraźne odczytywanie liczby nawet dla nas starszych przedstawia duże trudności, jeżeli ta liczba jest większa, niż 4 lub 5. Musimy przy takich liczbach wykonywać liczenie, które będzie

się odbywało prędzej lub powolniej, zależnie od wprawy, ale faktycznie, jak to niebardzo trudno jest sprawdzić, obserwując samego siebie lub rozpytując ludzi, istnieje. Istnieje ono i przy mniejszych grupach, tylko jest mało dostrzegalne, bo odbywa się nader szybko.

Liczba z drugiej strony nie zależy nie tylko od porządku, ale i od jakości przedmiotów. Wszystko jedno, czy liczymy stalki, czy kamyki, czy patyczki i t. p.; jeżeli liczba ich będzie ta sama, rezultat liczenia będzie ten sam. Fakt ten zwykle wyzyskują przy nauczaniu, usiłując wytworzyć w dzieciach pojęcie liczby, sądzą bowiem niektórzy, że istnieje również wyobrażenie liczby. Wyobrażenie takie jest związane z pewnym konkretnym przedmiotem. Powołują się przytem, jako na argument, na wiadomości z historyi arytmetyki i na sposoby rachowania u plemion spółczesnych, znajdujących się w pierwotnem stadyum kultury. Jedną z takich wskazówek np. podaje nasz język polski: mówimy pięść, oznaczając tem znany układ ręki naszej, która posiada pięć palców. Słowo „pięć" pochodzi właśnie od „pięść" i wskazuje, że przodkowie nasi zamiast odpowiedniego liczebnika używali ręki na oznaczenie liczby pięć. To samo dałoby się zanotować gdzieindziej. Np. sądzą, że „fir" (vier), po niemiecku „cztery", pochodzi od słowa „Pferd", które oznacza konia, posiadającego, jak wiadomo, cztery nogi. Ludy pierwotne niektóre nie liczą dalej jak do trzech, oznaczając wszystkie inne liczby słowami „wiele", „dużo". Wszystkie te fakty wskazują, jak sądzą niektórzy, że początkowo w świadomości człowieka pierwotnego zjawiała się liczba w postaci konkretnego wyobrażenia. Taki człowiek pierwotny, np. zamiast powiedzieć dziesięć ludzi, mówił: 2 ręki ludzi. Trudno zaprzeczać faktom, ale zdaje mi się, że tłomaczenie tych faktów jest tu dość dowolne. Aby właściwie zrozumieć znaczenie podobnych zjawisk, należy podkreślić jedno bardzo doniosłe pojęcie, jakie odgrywa i odegrało bardzo dużą rolę w arytmetyce i wogóle matematyce.

Tem pojęciem dużej wagi jest pojęcie *odwzorowania.* Jeżeli mamy dwa zbiory jakich przedmiotów, to nawet wte-

dy, gdy nie mamy jeszcze nazw odpowiednich, gdy obce nam jest samo pojęcie liczby, możemy skonstatować, czy zbiory te są liczebnie równe, lub który z nich większy. Nazwijmy nasze zbiory dla skrócenia Z_1 i Z_2, a każdy przedmiot należący do tego lub innego zbioru nazwijmy jego elementem, również dla krótszego wysławiania się. Jeżeli teraz każdemu elementowi pierwszego zbioru Z_1 podporządkujemy jeden i tylko jeden element Z_2 i okaże się, że przytem zbiór Z_1 wyczerpuje się wcześniej, to powiadamy, że Z_1 jest mniejszy, niż Z_2; jeżeli obydwa zbiory wyczerpują się jednocześnie, mówimy, że są sobie równe, posiadają, jak mówimy, tę samą zawartość.

Taki proces podporządkowania nazywa się procesem odwzorowywania. Pomiędzy zbiorami równymi istnieje, jak powiadamy, *doskonała odpowiedniość*, t. j. każdemu elementowi jednego zbioru odpowiada jeden i tylko jeden element drugiego, i odwrotnie. Proces odwzorowania nie zależy od *jakości* elementów obu zbiorów, nie zależy również od uporządkowania ich w tem znaczeniu, że każdorazowo możemy uwzględnić takie lub inne uporządkowanie.

Liczenie, jak widzieliśmy, również nie zależało (we właściwem znaczeniu tych wyrazów) od porządku i jakości liczonych przedmiotów. Rzuca się jednakże w oczy tutaj pomiędzy liczeniem a odwzorowaniem ta różnica, że przy liczeniu elementy liczonego zbioru podporządkowywaliśmy liczebnikom, wyrazom t. zw. ciągu naturalnego liczb: 1, 2, 3, 4, 5 i t. d., a przy odwzorowywaniu przedmiotom, elementom innego konkretnego zbioru. Poza tem wszystko pozostaje tem samem, przynajmniej na pierwszy rzut oka. Nietrudno zrozumieć, że pierwszem dalszem odkryciem na drodze przejściowej od odwzorowania do liczenia będzie odpowiedni wybór jednego ze zbiorów Z_1 i Z_2. Ten wybór musi być tak dokonany, aby jeden ze zbiorów był łatwo przenośny, mógł towarzyszyć stale w razie potrzeby rachmistrzowi początkującemu. Nasz karbowy dawny, licząc kopy zboża lub sztuki drzewa w lesie, albo co

innego, jeżeli nie jest biegły w rachunku (co się często zdarzało i teraz nierzadko się zdarza), wycina sobie na kijku kozikiem znaki, odpowiadające każdej kopie; pani ekonomowa, jeżeli znowu nie jest biegła w rachunku, stawia węglem kreski na deszczułce, odpowiadające garncom mleka; modlący się przesuwa ziarenka różańca, który dawniej odgrywał większą rolę, bo ludzie częściej nie umieli liczyć i t. p. Przykłady te wskazują, że tu wykonywany jest proces odwzorowania i przytem na przedmiotach dosyć łatwo przenośnych.

Wobec tego owe wyobrażenia liczbowe nabierają innego znaczenia: są to wyobrażenia przedmiotów obranych do wykonywania procesu odwzorowywania, ale ponieważ te przedmioty są indywidualne, mogą więc służyć do sprawdzenia, przeliczenia tylko określonych zbiorów. Przedmioty takie wzięte były z otoczenia najbliższego. Nadawała się do tego szczególniej ręka ludzka, jako przedmiot bezpośrednio, organicznie związany z ciałem człowieka: to też mamy w historyi arytmetyki dane, że t. zw. rachunek na palcach odgrywał dawniej dużą rolę. Np. rzymska cyfra V przypomina rękę, w której cieńszą linią jest oznaczony palec wielki, a grubszą inne. Teraz jeszcze błąkają się t. zw. sztuczki z dziedziny starożytnego rachunku na palcach. Rachunek na palcach, jak sądzą niektórzy pedagogowie, może mieć zawsze niemałe znaczenie, a szczególniej przy nauczaniu dzieci niedorozwiniętych. Nadaje się on głównie w zakresie pierwszego dziesiątka, gdzie może mieć dużą wartość, psychologicznie uzasadnioną.

Jeżeli zwrócimy uwagę na to, że przy większych liczbach proces odwzorowania wymaga pamiętania porządku, w jakim uszeregowane są przedmioty w zbiorze odwzorowanym, nietrudno zrozumieć, że proces odwzorowania móg najpierw dotyczyć tylko bardzo niewielkich zbiorów, jak to wskazują owe wyobrażenia liczbowe. Pamiętanie porządku elementów większego zbioru jest związane z większym wysiłkiem uwagi, a więc większą pracą umysłową. Wspomniane wyobrażenia liczbowe przyczepione były do określonych zbiorów, np. wyobrażenie pięści do zbioru o pięciu elemen-

tach. W taki sposób proces rozwoju myśli arytmetycznej nie mógł posuwać się dalej, zakres liczbowy nie mógł rosnąć, gdyż inaczej trzebaby było posiadać liczne wyobrażenia wielu liczb, co zbytnio utrudniałoby liczenie, a właściwie odwzorowywanie. Dlatego stadyum owych wyobrażeń mogło się utrzymać dotąd, póki potrzeba praktyczna nie zmusiła człowieka do udoskonalenia owego aparatu odwzorowującego. Karbowy, który wycina znaczki na kiju, jest już na wyższym szczeblu rozwoju, bo może w ten sposób znacznie większe liczby odwzorowywać. Póki praktyka życia związana była z niewielkiemi liczbami, środki powyższe jako tako wystarczały; ale później musiały ustąpić innym: aparat odwzorowujący musiał się stale wydoskonalać. Podobne zjawisko spotykamy w sposobach pisania, które najpierw związane było, jak to widzimy np. w hieroglifach egipskich, z rysunkiem. Aparat odwzorowujący będzie tem doskonalszy, im łatwiej da się przenosić, im większy zakres liczb objąć potrafi i do wszystkich przypadków będzie stosowny. Pisanie zwyczajnych kresek, którego pozostałości widzimy w cyfrach rzymskich, pozwala zapisywać nawet większe liczby przy odpowiedniej cierpliwości, ale ma inne braki, które łatwo zrozumieć: wymaga dużo miejsca i dużo czasu, niewygodny jest do porozumiewania się i działań.

Ostatnim szczeblem rozwojowym w tej dziedzinie jest wytworzenie ciągu naturalnego, wytworzenie słów odpowiadających liczbom stale zwiększającym się o jedność. Ten ciąg naturalny jest uniwersalnym aparatem odwzorowującym, najwygodniejszym, bo kto go raz posiadł—zawsze z nim pozostanie. Liczenie jest to odwzorowywanie za pomocą ciągu naturalnego liczb, podporządkowywanie każdego kolejnego elementu przeliczonego zbioru kolejnemu elementowi ciągu, który przytem daje odpowiedź na pytanie: *ile przedmiotów policzyliśmy?* Utworzenie ciągu naturalnego zawiera wiele innych cech. Np. odrazu rzuca się w oczy, że nie można każdej następnej liczby ciągu nazywać oddzielnem słowem bez żadnej prawidłowości: myśl zgubiłaby się napewno w tym lesie słów.

Jeżeli przedmioty liczone możemy przestawiać dowolnie i przez to liczba ich się nie zmieni, to znów wyrazy ciągu naturalnego nie mogą być przestawiane; zawiera się w ich uporządkowaniu coś więcej, niż w zwyczajnym szeregu znaków lub też jakichkolwiek innych przedmiotów. Wyrazy ciągu są reprezentantami wszelakich zbiorów o tej samej zawartości, a każdy wyraz następny jest reprezentantem zbiorów o zawartości większej (t. j. przy odwzorowywaniu 2 zbiorów jakichkolwiek, których reprezentantami są 2 następujące po sobie wyrazy ciągu naturalnego, po wyczerpaniu jednego z tych zbiorów w drugim pozostanie jeszcze jeden element). Każdy wyraz ciągu naturalnego przedstawia jakby symbol, znak wykonanej pracy odwzorowywania, czyli liczenia. Ta ostatnia uwaga ma wielkie znaczenie dydaktyczne, bo bardzo często uczymy najpierw np. w zakresie pierwszego dziesiątka liczyć, uważając to za rzecz konieczną przy nauce początków. Jest to mniemanie niesłuszne: dziecko może zapamiętać szereg kolejnych liczebników, może stosować to do liczenia przedmiotów, ale takie liczenie będzie procesem czysto formalnym, bo dla dziecka w takim razie nazwy kolejne liczebników nie będą posiadały nic ponad zwyczajne dźwięki, szeregowane w porządku kolejnym, utrwalonym tylko przez pamięć (patrz np. S. Jankowski: „Jak prowadzić naukę rachunków. Część I.“ Warszawa 1908). W niektórych przypadkach taka znajomość szeregu liczebników może nawet zaszkodzić, a wogóle przygotowaniem do nauki być nie może.

Tak samo, gdy pokazując różne przedmioty i przeliczając je, uważamy, że w ten sposób wytwarza się *pojęcie* liczby, postępujemy zbyt ryczałtowo i nieoględnie. (Np. patrz W. Traczyński: „Przewodnik metodyczny do nauki rachunków". Jarosław 1910). Już z poprzedniego krótkiego szkicu czytelnik widzi, ile to momentów myślowych potrzeba uwzględnić, by można było mówić o pojęciu liczby, z drugiej zaś strony pojęcia muszą się *wytworzyć same*, wyrosnąć, a do tego nie dość samych tylko pokazów i zwrócenia krótkiej uwagi. Uczeń musi przejść przez wszelkie stadya przygotowawcze,

a więc musi zauważyć niezależność liczby od uporządkowania, od jakości przedmiotów, musi odwzorowywać zbiory jedne w drugich za pomocą stałych przedmiotów, np. na liczydle, kresek stawianych u siebie w tabliczce (arytmetyka bez słów w ochronkach), obrazków, następnie liczyć różne przedmioty, używając słów. Nie dość jeszcze na tem: pojęcie danej indywidualnej liczby wtedy się zjawia, jest w posiadaniu dziecka, gdy ono *niem operuje*, co jest możliwem tylko przy wykonywaniu różnych z liczbą działań i zadań, gdy dziecko *uświadamia sobie swoje procesy psychiczne*. Wobec tego, że języka dzieci nauczają się zwykle dość wcześnie, pojęcia, jakie wyraża mowa, zdają się nam już gotowemi; gdy tymczasem bliższe zbadanie rzeczy wykazałoby duże braki w tej dziedzinie. Można przeliczać różne przedmioty, ale nie mieć pojęcia liczby, przynajmniej samo takie przeliczanie nie może być sprawdzianem tego. Najlepszym sprawdzianem jest samodzielne zastosowanie liczby przez ucznia w zadaniu. Jeżeli dziecko powie do kolegi: „dam ci cztery stalki, a ty daj mi obsadkę, bo swoją zgubiłem", to tutaj najlepiej się przejawia wartość zdobytych pojęć. Zadanie, jak wszędzie w matematyce, ma również tutaj kapitalne znaczenie. Na tem polega wartość tak zwanego praktycznego kierunku w nauczaniu wogóle. Jeżeli dziecko zastosowuje pewne pojęcia do zagadnień znajdujących się w sferze jego zainteresowań, jeżeli operuje pojęciami temi, tem samem musi je posiadać. Inne sprawdziany są o wiele ryzykowniejsze i nie dają uczącemu pewności.

Zwykle przynajmniej uważamy, że pojęcie liczby rozwija się na tle doświadczenia. Powiedzieć tylko, że coś powstaje na tle doświadczenia, jest to często prawie nic nie objaśnić. Mamy tu do czynienia w naszem zagadnieniu z bardzo zawiłym procesem. Jednym z wybitnych rzeczników doświadczalnego powstawania pojęć liczbowych jest myśliciel angielski John Stuart Mill. Stawia on sprawę najjaśniej i najkonsekwentniej. Przytoczymy tu słowa samego Milla: „Wyrażenie „dwa krzemienie i jeden krzemień" oraz wyrażenie „trzy krzemienie" w rzeczywistości oznaczają ten sam zbiór

krzemieni, a bynajmniej nie ten sam fakt fizyczny. Są to nazwy tych samych przedmiotów, lecz tych samych przedmiotów w dwóch stanach odmiennych: chociaż nazwy oznaczają te same rzeczy, lecz towarzyszące im pewne cechy są różne. Trzy krzemienie w dwóch różnych zbiorach i trzy krzemienie w jednym zbiorze oddziaływają na nasze zmysły nie jednakowo, a twierdzenie, że przez zmianę miejsca i rozkładu tych krzemieni można osiągnąć, aby te krzemienie wywoływały ten lub inny szereg czuć, jakkolwiek byłoby banalnem, nie jest jednakże tautologią. Twierdzenie to jest prawdą znaną z bardzo wczesnego i stałego doświadczenia: jest ono prawdą zdobytą indukcyjnie, a takie właśnie prawdy stanowią podstawę nauki o liczbach. Wszystkie prawdy podstawowe tej nauki opierają się na świadectwie zmysłów dowody czerpiemy, wykazując oczom lub palcom naszym, że dana liczba przedmiotów, np. dziesięć kul, może przy rozmaitym układzie przedstawiać się naszym zmysłom jako różne szeregi liczb o sumie równej dziesięciu. Wszystkie udoskonalone metody nauczania dzieci arytmetyki oparte są na znajomości tego faktu. Wszyscy, którzy pragną uczyć arytmetyki, wpływać na umysł dziecka, dać wiedzę o liczbach, a nie o cyfrach—uczą teraz na podstawie świadectwa zmysłów, jak wskazano powyżej". (System Logiki. T. I, ks. II, rozd. VI, wyd. 5-e).

Mill słusznie twierdzi, że dwa różne ugrupowania tych samych przedmiotów stanowią różne fakty fizyczne. Skądże wtedy dowiadujemy się o tem, że liczba przedmiotów jest ta sama? „Twierdzenie to jest prawdą znaną z bardzo wczesnego i stałego doświadczenia"—mówi Mill. Lecz czy takie rozwiązanie cokolwiek rzecz tłomaczy? Jest to dogmat i nic ponadto. Dlaczego w takim razie doświadczenie nie poucza nas bez zmudnego liczenia, że różne ugrupowania tych samych 60 np. przedmiotów dają tę samą liczbę? Dlaczego ogranicza się do niewielkiej bardzo liczby przedmiotów, jakkolwiek ogarnąć wzrokiem wyraźnie możemy czasem bardzo znaczne ich liczby? Gdyby liczba była cechą ugrupowań przedmiotów, którą można ujmować

zmysłami, odczytywanie liczby nie zależałoby od liczności grupy. Aby odczytać liczbę, trzeba porównywać różne ugrupowania, albo między sobą w pamięci, albo ze stałem innem ugrupowaniem, co jest łatwiejsze, a tem samem wykonać proces odwzorowania. Końcowe uwagi powyższego ustępu z dzieła Milla są słuszne niezależnie od jego teoryi filozoficznej. Dziecko może myśleć tylko nad konkretnymi przedmiotami, tylko takie może porównywać, ale robimy to, uwzględniamy tę rzecz dlatego, by to dziecko później mogło myśleć *nad wytworami własnej myśli*, bo to jest zasadniczą właściwością nauki arytmetyki i matematyki wogóle. Konkretne przedmioty pomagają do wytworzenia pojęcia liczby, które jest produktem czystej myśli, ale nie tworzą tego pojęcia. Myśl dziecka powoli odrywa się od konkretnych przedmiotów, staje, że tak powiem, na własnych nogach, a wtedy robi wprost ogromnej doniosłości krok naprzód. Nie myślmy, że to tak prędko się odbywa: nierzadko nawet w wyższych klasach szkoły średniej jeszcze się do tego nie dochodzi. Ale wróćmy do Milla.

Sam on czuje, że czegoś brakuje w jego teoryi, bo oto dalej powiada: „Sąd „trzy jest dwa i jeden" musimy nazwać określeniem trójki; natomiast oparte na tym sądzie liczenie wypływa nie z samego określenia, lecz na zasadzie założenia zawartego w niem twierdzenia arytmetycznego, mianowicie: istnieją zbiory przedmiotów, które, oddziaływając na nasze zmysły w postaci wrażenia: °o°, mogą być podzielone na dwie części w ten sposób: oo o. Ponieważ zakłada się tego rodzaju twierdzenie, nazywamy wszystkie takie ugrupowania: trzy, a stąd i sam zawarty w założeniu tem fakt fizyczny będzie mógł być poczytywany za określenie liczby trzy". Mill chce tu powiedzieć, że niezależnie od ugrupowania przedmiotów poznajemy w doświadczeniu te, w których liczba jest ta sama, i że ta właśnie niezależność od ugrupowania stanowi „twierdzenie" arytmetyczne; nie wykazuje natomiast, jak to już wyżej zanotowaliśmy, w jaki to sposób w doświadczeniu dochodzimy do podobnego zasadniczego „twierdzenia", dlaczego mamy pewność, że

różnym grupom przedmiotów odpowiada ta sama liczba. W dalszych swych wywodach Mill wskazuje na jeszcze jeden „element hypotetyczny". Jest nim założenie identyczności liczonych jednostek. Wszak wiemy z doświadczenia, że niema dwóch zupełnie jednakowych przedmiotów. Skąd w takim razie założenie, że liczone przedmioty są identyczne? Nawet w tej drobniejszej sprawie widać specyalną funkcyę naszej myśli, która sobie sama musi stworzyć rzeczy i nad nimi pracuje. Prócz tego powyższe wywody Milla wcale nie dotyczą przedmiotów zjawiających się jeden za drugim kolejno w czasie*).

Uwagi, które wypowiedziane zostały w niniejszym rozdziale, dadzą się streścić narazie w takim ogólnym wniosku dydaktycznym: Należy baczniejszą zwracać uwagę na wytwarzanie się pojęcia liczby, a dlatego prócz odliczania *różnych* przedmiotów uwzględniać następujące czynniki: 1⁰ proces odwzorowania, 2⁰ niezależności liczby od uporządkowania. Najlepszym zaś sprawdzianem w kwestyi posiadania pojęcia liczby jest samodzielność stawianych przez ucznia zapytań treści arytmetycznej i samodzielne stosowanie pojęć liczbowych do bezpośrednio nasuwających się zagadnień otaczającego życia.

Swoją drogą czytelnik zapyta nas: a czemże jest liczba, jak ją określić? Określenia takiego niema, odpowiadamy, bo liczba całkowita jest pierwotnym faktem arytmetycznym. Jeżeli co chcemy określić, musimy odwołać się do pojęć elementarniejszych lub za elementarniejsze uważanych. Różni metodycy podają różne określenia liczby, ale wszystkie one bez wyjątku najczęściej grzeszą nielogicznością. Dawniej w podręcznikach (nawet i teraz czasem) podawano określenie liczby w rodzaju następującego: liczba jest to rezultat liczenia albo mierzenia. Jasnem jest jednakże, że w samem pojęciu liczenia i mierzenia już zawiera się pojęcie liczby, przez co popełnia się błąd logiczny, który na-

---

*) Zrobiliśmy tu wyjątek dla Milla, gdyż chodziło nam o pewne wyjaśnienie popularnych poglądów.

zywają „błędnem kołem" (petitio principii). Jedna rzecz jest wyraźna i powinna być dobrze rozumiana, że mówiąc o liczbie, mamy do czynienia z pojęciem, abstrakcyą, która nie zjawia się w głowie dziecka odrazu, ale musi być przygotowana. Stanowi to przygotowanie najważniejsze zadanie metody nauczania pierwszych początków.

Bezpośrednio z zagadnienia o istocie liczby wypływa na tle tej lub innej odpowiedzi na to zagadnienie główna kierująca zasada nauczania. W ogromie literatury i chaosie poglądów wyłaniają się 2 takie zasady. Jedna z nich to *zasada liczenia*, druga t. zw. *obrazów liczbowych*. Przyjrzyjmy się po kolei każdej z nich.

Główną rzeczą w powstawaniu pojęcia liczby jest liczenie, jako *szereg aktów uwagi*, które mają miejsce przy zatrzymywaniu się kolejnem nad każdym oddzielnym liczonym przedmiotem, wszystko jedno jakiej ten przedmiot będzie natury. Proces liczenia nie zależy od jakości liczonych przedmiotów ani od ich uporządkowania, wyraża pewną sumę pracy psychicznej. Ta praca będzie jednakowa, czy liczymy konie na pastwisku, czy też uderzenia zegara albo gwiazdy w pewnem miejscu niebios. Jednostajność rezultatu i niezależność od natury przedmiotów jest głównym powodem, że liczba oddziela się niejako od przedmiotów konkretnych, a gdy to oddzielenie nastąpi, mamy już pojęcie liczby gotowe. Dlatego, ucząc dzieci, należy wymagać, by przeliczały różne przedmioty w najrozmaitszych położeniach i postaciach; przez to staje się dla nich jasne, że liczba wcale od ich właściwości nie zależy. Tak samo jak w powstawaniu pojęcia liczby, proces liczenia odgrywa zasadniczą rolę w działaniach. Np. w jakiż sposób wykonywamy i sprawdzamy dodawanie? Mamy, dajmy na to, dodać 5 do 3. Liczymy od jednego do 5, a następnie w dalszym ciągu od 1 do 3, ale to ostatnie zastępujemy potem przez odpowiednie przedłużenie szeregu naturalnego po za 5. Schematycznie to przedstawić można tak:

1, 2, 3, 4, 5,
1, 2, 3
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Przy dodawaniu trzeba więc właściwie wykonywać 3 procesy liczenia. Przy odejmowaniu liczymy w odwrotnym porządku w drugim wierszu. Za pomocą liczenia sprawdzamy rezultaty tych działań elementarnych. Stąd sprawne i szybkie liczenie jest konieczne dla dobrego, świadomego opanowania działań. Takie pojmowanie rzeczy, więcej lub mniej dokładne, jest popularne. Pochodzi z tego ten fakt, że uczący najpierw wprawia dzieci w liczenie, sądząc, że w ten sposób zdobywa podstawę do dalszej nauki. Nie wypływa to z samej zasady nawet. W niej główny nacisk kładzie się na proces psychiczny przechodzenia od jednego przedmiotu do drugiego, na wspomniany szereg aktów uwagi, przyczem nie jest ważne, czy każdy taki akt uświadomiwszy sobie nazywamy, czy też obchodzimy się bez słów. W każdym jednakże razie ta strona zasady liczenia jest bardzo niejasna i budzić może powyższe nieporozumienie. Jeżeli wymieniam kolejne liczebniki, to mogę to robić mechanicznie, a w takim razie równie dobrze mogę powtarzać szereg nazw chińskich albo jakich innych dźwięków. Cóż z takiego powtarzania mi przyjdzie? Jaka treść psychiczna jest w niem zawarta? Wypowiadam słowo „pięć", cóż przez to rozumiem? Słowo to skojarzone jest z następnem „sześć" i poprzedniem „cztery", ale skojarzenie to jest czysto przygodne, formalne, bo żadnemu z tych słów nie odpowiada żadna treść psychiczna. My nie wytwarzamy w ten sposób *szeregu naturalnego*, ale wypowiadamy szereg dźwięków bez znaczenia. Wytworzyć szereg naturalny jest to zrobić to, do czego dążymy: dać pojęcie liczb i związek między niemi. W jakiż sposób taka bezduszna rzecz, jak zapamiętanie szeregu kolejnych dźwięków, może być podstawą dalszej nauki? Nawet w nauce języka obcego pamiętanie nazw różnych przedmiotów jeszcze nie wystarcza; a tu mamy jeszcze mniej. Jeżeli więc słuszna jest zasada liczenia, to

nie może być mowy o takim procesie liczenia, jaki zwykle wykonywają ci, którzy się arytmetyki trochę nauczyli. Jedną z ważnych zasad dydaktycznych jest pamiętanie o tem, że przynajmniej w rzeczach podstawowych — a o takich tu mowa — nie można używać słów, którym nie odpowiada żadna treść. Oddzielne liczebniki muszą być najpierw poznane, musi być uchwycony związek między kolejnemi liczbami, musi być gotowe pojęcie liczby, aby proces liczenia w tej formie, o której mówimy, mógł mieć miejsce i znaczenie. W takim razie upada może cała zasada? Nie, bo zwykły proces liczenia nie jest zjawiskiem *pierwotnem, lecz pochodnem.* Zasada liczenia ostać się może, ale trzeba opierać się w niej nie na ostatecznej formie procesu liczenia, lecz na pierwotniejszej. Taką pierwotniejszą formą jest *odwzorowanie.* Z niego też należy wychodzić w nauczaniu. Przez odwzorowanie uczeń porównywa 2 zbiory przedmiotów, odpowiada na zapytania dotyczące pojęć: mniej, więcej, równo (brakuje, przewyższa) i t. d. Tu niema jeszcze i nie może być pojęcia liczby, ale jest pierwsze stadyum porównywania, jest odczuwanie *wielkości* *). W jaki sposób posuwać się dalej w nauczaniu, o tem będzie mowa niżej; teraz zaznaczymy tylko takie nasze stanowisko wobec zasady liczenia. Nie miejsce tu na dłuższe wywody, przypuszczam jednakże, że tego, co powiedziano, wystarcza do zrozumienia potrzebnej do dalszych wywodów rzeczy.

Zasada druga, czyli zasada obrazów liczbowych, jest o wiele młodszą, niż poprzednia. Wyrosła ona pod wpływem psychologii doświadczalnej i cała jest owiana jej młodzieńczym duchem. Nie przemawia to jednakże na jej korzyść. Zwolennicy tej zasady, głównie w Niemczech, krytykują zasadę liczenia przeważnie z dwóch stanowisk: 1⁰ że jest oparta na założeniach à priori, niemal dowolnych, 2⁰ że niema znaczenia tam, gdzie nie może być mowy o pojęciu

---

*) Stąd właściwie nie powinno się nazywać powyższej zasady „zasadą liczenia", ale „odwzorowania" (nie Zahlprinzip, ale Abbildungsprinzip). Rzecz ta wyraźnie występuje w matematyce wyższej, w t. zw. teoryi mnogości.

liczby, gdzie jak u dziecka istnieją tylko konkretne wyobrażenia, więc jeżeli się ją stosuje w tym czasie, to obciąża się pamięć tylko, a nie oddziaływa na inne siły psychiczne. Już w zakresie pierwszego dziesiątka, mówi Lay, jeden ze zwolenników tej zasady, musi dziecko spamiętać rezultaty blizko 200 różnych działań. Tak, spamiętać, bo ten fakt, że zapomocą liczenia może ono te rezultaty sprawdzić, nie wystarcza, gdyż działania muszą być zmechanizowane, a w jakiż to sposób można zrobić, jak nie zapomocą pamięci? Ileż trudu w tem się mieści, ile pracy psychicznej, którą możnaby na coś lepszego zużytkować, gdyby się inaczej do rzeczy zabrać! Ponieważ dziecko zaczynające się uczyć myśli obrazami, wyobrażeniami konkretnemi, czy nie możnaby było wynaleźć, jako odpowiedników liczb przynajmniej pierwszego dziesiątka, takich wyobrażeń, które ułatwiłyby przez uprzytomnienie ich sobie działania z liczbami i tem samem zekonomizowały wysiłki pamięci? Np. w razie dodawania 4 i 3 mógłbym, jak i w innych przypadkach podobnych, podsunąć dzieciom takie obrazy:

o o   o o
o o   i   o

o o o o
Połączenie ich o o o dałoby nowy obraz liczby 7. W ten sposób działania wykonywałyby się w wyobraźni, jeżeli każdej liczbie pierwszego dziesiątka (nawet do 12) podporządkowany był podobny obraz i ten obraz utrwalił się przez powtarzanie w pamięci wzrokowej dzieci. Myśl taka co prawda sięga drugiej połowy XVIII-go wieku*), ale dopiero niedawno różne projekty obrazów liczbowych, podawanych przez różnych metodyków, poddano doświadczalnemi badaniu. Z tych doświadczeń (którym można to i owo zarzucić) zwycięsko wyszedł szereg Born'a (metodyk niemiecki z drugiej połowy XIX-go wieku):

*) Wpadł na ten pomysł Busse, profesor w filantropinum w Dessau.

```
1     2     3       4       5
o     o    o o     o o    o o o
      o    o       o o    o o      i t. d.
```

Jedną z głównych rzeczy w zrozumieniu tej zasady jest fakt natychmiastowego niemal odczytywania liczby z danego ugrupowania. Badając różne ugrupowania punktów doświadczalnie, wybrano to, przy którem takie odczytywanie dawało najmniej omyłek. Przyznać należy, że zwolennicy tej zasady nie wypracowali jeszcze dokładniejszej metody praktycznego nauczania. Książki np. Walsemanna i Laya zawierają dużo rzeczy ciekawych, ale wyrobionej metody praktycznej tu jeszcze niema. Przytem postawiono zarówno ze strony teoretycznej, jak praktycznej wspomnianej zasadzie szereg zarzutów poważnych, z którymi nie można się nie zgodzić. Doraźne chwytanie liczby z danego ugrupowania, jak to wiemy z własnego doświadczenia my starsi, nie jest rzeczą łatwą. Odrazu odczytujemy przy prawie dowolnem ugrupowaniu 2, 3, czasem 4, ale dalej już napotykamy trudności. Czy żądanie, aby dzieci chwytały liczbę z powyższego, choćby najwygodniejszego, ugrupowania, nie jest wygórowane? Czy nie jest za trudne i nie obciąża ze swej strony zbytnio wzrokowej pamięci ucznia, tembardziej tego, który wzrokowcem nie jest albo jeszcze się nim nie stał przez naukę książkową? Dalej, działania z takimi obrazami nie są bynajmniej łatwe, bo np. gdy dodajemy o o / o o i o o / o wszystko idzie gładko, ale gdy mamy dodać o o o / o o i o o / o potrzebna jest pewna modyfikacya obrazów, potrzebne jest ich naruszenie albo wykonanie w wyobraźni obrotu jednego z nich o 180°. Czy można się przytem uwolnić od liczenia? Uczeń posiada np. obrazy 7 i 8, ale dodawanie tych liczb już bez liczenia obejść się nie może; nie może też wtedy, gdy niema pod ręką odpowiednich konkretnych obrazów, jak również niema pewności, czy dane działanie wykonane jest dobrze. W jakiż sposób dalej przejdziemy do pojęcia liczby? Droga

pozostaje ta sama, co poprzednio, a zdobyte ułatwienie jest problematyczne. Zawiera się jednakże w tym poglądzie zdrowe, zdaniem mojem, ziarno prawdy, a dotyczy ona przedewszystkiem tego ważnego metodycznie faktu, że obok rozmaitości liczonych przedmiotów musi być pewien stały przyrząd, na którym dzieci widzą pewne stałe, jednakowe ugrupowania tych przedmiotów o danej, odpowiadającej im liczbie. Istnienie takiego przyrządu ułatwia sprawdzanie działań. Dzieci przyzwyczajają się do jego wyglądu, uwaga ich nie jest zajęta szczegółami konkretnymi i dlatego treść arytmetyczna łatwiej tu występuje, co ma niemałą wartość przy wyjaśnianiu. Tu też widzimy jakby ciąg dalszy zasady odwzorowania. Weźmy przykład. Po zaznajomieniu się z 6, uzmysłowieniu jej i t. p., różnych przykładach konkretnych i t. d. występują działania z liczbami oderwanemi. Ile będzie 4 a 2? Może się zdarzyć (a przy pośpiesznem, u nas zwyczajnem nauczaniu zdarza się często), że uczeń nie umie na to odpowiedzieć, tembardziej wtedy, gdy powtarzamy i o 6 niema ciągle mowy. Na przyrządzie stałym łatwo nieudolnemu matematykowi rzecz wyjaśnić. To samo może się zdarzyć, gdy rozwiązujemy zadanie, którego fabuła omawia przedmioty nie znajdujące się w klasie. Jak tę rzecz w nauczaniu wyzyskać, o tem będzie mowa w rozdziale następnym.

Przytaczając tutaj główniejsze poglądy na niektóre zasadnicze kwestye, a także uwzględniając niektóre uwagi krytyczne, chodzi mi tylko o wyjaśnienie tych myśli, jakie stanowią podstawę niniejszej książeczki.

Reasumując powyższe, twierdzę: 1-o zasada liczenia jest słuszna, ale tylko wtedy, gdy przez liczenie nie będziemy rozumieli zwykle używanego procesu, ale zaczniemy w nauczaniu od formy pierwotniejszej, od odwzorowania. 2-o zasada obrazów liczbowych nie jest dotąd praktycznie należycie wyzyskana i nie wiadomo, czy da się wyzyskać, w każdym razie ważnym jest fakt istnienia przy nauczaniu stałych ugrupowań przedmiotów na stałym przyrządzie.

ROZDZIAŁ II.

W rozdziale niniejszym będziemy usiłowali wykazać, jak to, co powiedziane było powyżej w odniesieniu do pojmowania zasady liczenia, może być zastosowane w praktyce.

Zwykle uważają, że nauczanie elementarne zaczynać się winno od nauki czytania i pisania oraz rachunku, jak to się dzieje faktycznie w przeciętnej szkole elementarnej i nauce domowej. Wprowadzono tu i owdzie t. zw. pogadanki o różnych rzeczach otaczającego dziecko świata. Jest to znaczny krok naprzód do głębszego zrozumienia zadań elementarnego nauczania. Pogadanki te bezwątpienia mają duże znaczenie: uczą patrzeć, obserwować, kształcą zdolność uwagi dowolnej, dają wiedzę i t. p. Ale czyż istotnie rozwój psychiczny i poznanie zdobywane przez te pogadanki są tego rodzaju, by można je było nazwać pogadankami o rzeczach? Niewiele rzeczy poza obrazkami może nauczyciel w szkole pokazać, a czasem nawet obrazków, choćby jakich takich, nie posiada. Czyż wtedy to, o czem mówimy, będzie nauką o rzeczach, a nie o słowach? Uczymy się widzieć i obserwować faktycznie, patrząc na rzeczy rzeczywiste. Nie tylko dalej przez patrzenie świat otaczający nas poznajemy, ale przez przezwyciężanie i odczuwanie oporu, jaki stawiają rzeczy otaczające naszym chceniom i celom. Formalny sposób nauczania zwraca główną uwagę na mowę, na t. zw. „pełne zdania“, na obfitość i bogactwo słow-

nictwa, nie troszcząc się często o to, co istotnie w głowach dziecinnych dźwiękom mowy odpowiada. Wprowadzane sporadycznie do elementarnego nauczania rysunek i roboty ręczne na razie sytuacyi nie ratują, gdyż samo to wprowadzenie nie dowodzi jeszcze rozumienia doniosłości podobnych przedmiotów. W nich właśnie tkwią siły, które rozsadzą obecny formalizm szkoły elementarnej i samo pojęcie nauczania elementarnego przeobrażą, zmienią również jego metodę. Szkoła elementarna nie jest niczem zdeklarowanem. W różnych krajach np. w różnym wieku zaczynają dzieci naukę elementarną. Zależy to od wielu przyczyn, odgrywają tu rolę czynniki rasowe, narodowe, ale niemałe ma też znaczenie samo pojmowanie elementarnego nauczania. Wiek dzieci przyjmowanych do szkoły elementarnej waha się pomiędzy 5 a 8 latami w różnych miejscowościach kuli ziemskiej. Ciekawe jest właśnie, że gdzie, jak w Ameryce, w nauczaniu elementarnem t. zw. metody praktyczne odgrywają większą rolę, tam przyjmowane są dzieci młodsze. Zwróćmy uwagę dalej, że obecnie nierzadko już dzieci zaczynają się „uczyć" w t. zw. np. szkołach macierzystych, ochronach i t. p. znacznie wcześniej, niż to zwykle jest przyjęte w szkole elementarnej. Naturalnie, uczą się tu dzieci, dla których utrudnione jest normalne wychowanie domowe, ale takich dzieci jest legion, który stale wzrasta. Z drugiej strony „normalne" wychowanie domowe musi też podlegać modyfikacyom, których żąda czas i życie, a tem samem niejedno musi się w niem zmienić, na niejedną sprawę zaniedbaną i niedostrzeganą trzeba będzie zwrócić uwagę. Nauczanie rachunków musi też uledz zmianie. Jestem zdania, że baczne oko wychowawcy jeszcze przed szkołą elementarną w tę dziedzinę wejrzeć powinno. Wszystko, o czem dalej będzie mowa, dotyczy nie tylko ochronki np., ale i domu.

Czytelnik, który uważnie przeczytał poprzedni rozdział, zrozumie, że można podkreślić pewne przygotowawcze momenty powstawania pojęć liczbowych, wcale nie używając słów, liczebników. Jest to jakby „arytmetyka bez słów", jeżel mogę tak nazwać to, o czem chcę pisać. Pojęcia odwzo-

rowania, niezależności zbioru konkretnego od porządku, od formy przedmiotów, ich układu i wogóle jakości zmysłowej, mniejszość, większość i równość zbiorów co do ich mocy — oto treść podstawowa tej „arytmetyki“. Niesłusznie zwykle te rzeczy pozostawiane są czasem w całości własnemu doświadczeniu dziecka i jego pracy duchowej; bo nawet gdyby można było istotnie na to doświadczenie liczyć, to w każdym razie uczący powinien dbać o porządek w tej dziedzinie i wiedzieć dokładniej o tem, by przystosować odpowiednio swe postępowanie. Jakie znaczenie ma kwestya tu omawiana, wyrażą dobitnie słowa wybitnego matematyka szwedzkiego S. Mittag-Leffler'a: „Bez specyalnej zdolności myśli do odwzorowywania jednego objektu w drugim, t. j. bez liczenia, matematyka nie istniałaby“ (Compte rendu du Congrés des mathématiciens à Stockholm. 1909, str. 16). Jakże mało jednakże na tę kwestyę zwraca się uwagi! Być może, że tu niejeden praktyk zrobi zarzut, że głos matematyka mało może decydować w sprawie tak elementarnego nauczania. Nauka jest jednakowo wielka wszędzie, czy w drobnych zaczątkach, czy u szczytu, a głęboki znawca przedmiotu wskazuje nam na te momenty podstawowe, których znaczenie dopiero on potrafi ocenić, psycholog zaś z rzeczą nieobeznany może tylko czasami zgadnąć. Dla stworzenia dobrej metody nauczania trzeba wyzyskać wszystkie możliwe dane.

W celu zaradzenia sprawie przytoczę tu kilka uwag.

Nauczanie przedszkolne rachunku dzielę na 3 stopnie. Nauka całkowicie jest związana z pracą ręczną.

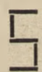
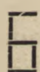
Pierwszy stopień — odwzorowywanie podobne.

Na tym stopniu dzieci układają figury podobne do tych, jakie mają podane we wzorcu. Taki wzorzec powinien być przygotowany odpowiednio z klocków, np. przymocowanych do tektury, ustawionej na tablicy. Układanie odbywa się za pomocą klocków takich samych. które, jak we wzorcu, mogą być różnokolorowe. Później można figury wyrysowywać na tablicy kredkami.

Wysuwają się następujące momenty: 1-o układanie fi-

gur odmiennych, niż pierwsze (np. kwadrat), ale o tej samej liczbie klocków. Najpierw uczący sam podsuwa różne zmiany, które dzieci naśladują, a później zachęca je do samodzielnej modyfikacyi. 2-o Układanie figur o mniejszej lub większej liczbie klocków. W pierwszym momencie dzieci układają nową figurę z tych samych klocków, jakie zużyte były na ułożenie poprzedniej, stopniowo ją niszcząc. W drugim robi się to samo, ale klocki dawne albo częściowo pozostają, albo ich będzie brakowało, i trzeba uzupełnić przez dobranie nowych. Przy tem wszystkiem na wspomnianej tekturce dzieci mają przed oczyma obie figury w całości.

W ten sposób może się zrodzić pojęcie, że ten sam zbiór klocków może przybierać różne postacie. Można układać również utwory przestrzenne.

Nasuwa się tu cały szereg różnych „zadań". Np. macie trójkąt, weźcie po klocku i zróbcie kwadrat, jeszcze po klocku i zróbcie domek i t. p. Wogóle dla figur dobrzeby było obmyślić, jak mi się zdaje, odpowiednie nazwy, przynajmniej dla niektórych częściej używanych, układać nawet podobieństwo liter, cyfr, przedmiotów znanych i t. p. Np. mamy zbiór klocków w jakikolwiek sposób ułożonych (dajmy na to 5), układamy z nich taką figurę: . To samo można zrobić dla innych zbiorów nie przekraczających liczb pierwszego dziesiątka. Np. 6: , 8:  i t. d. Jeżeli figura przez częste użycie, dajmy na to do zabawy lub opowiadania, jest dobrze znana, możemy dzieciom powiedzieć, by ułożyły ją w pamięci, co jest ważne, gdyż nadaje pewność i kontroluje wyobraźnię geometryczną.

Stopień drugi — odwzorowywanie w szeregu.

Uczący pokazuje na tekturze figurę ułożoną z klocków w ten sposób, aby każdy klocek wyróżniał się np. barwą. Następnie, zachowując barwę, układa w szeregu jeden za drugim takie same klocki, ale inne. Zaznacza, że klocków

tu i tam jest „tyleż”, „równo”. Takie przejście od dowolnej konfiguracyi do szeregu stanowi główną treść tego stopnia.

Można tu wyseparować następujące momenty: 1-o układanie szeregu na zasadzie danej na tablicy figury, z zachowaniem podobieństwa barw i bez niego; 2-o układanie szeregu na zasadzie dowolnej grupy podanych klocków, bez widocznego porządku następstwa, z zachowaniem podobieństwa barw i bez niego; 3-o układanie szeregu na zasadzie wrażeń słuchowych, otrzymywanych np. z nastawionego na wolne tempo metronomu, uderzeń zegara; na zasadzie przedmiotów otoczenia (jednorodnych, później niejednorodnych); 4-o odwzorowywanie w szeregu zapomocą innych przedmiotów, niż klocki, np. krążków tekturowych, palców, stawiania kresek i t. p.

Stopień trzeci — odwzorowywanie w szeregu specyalnie skonstruowanym (szereg Borna).

Celem, jaki sobie tu postawić mamy, jest nadanie piętna charakterystycznego zbiorom o równej mocy. Zwyczajny szereg stanowi przejście do tego stopnia, w nim to nie jest tak widoczne, gdyż przy dość dużej liczbie uszeregowanych przedmiotów trudno odróżnić, który zbiór jest większy, a który mniejszy. W ten sposób zużytkowujemy doświadczenie zwolenników zasady obrazów liczbowych. Układanie w szeregu pozwala porównywać moc dwóch równych zbiorów. Używamy tutaj krążków tekturowych. Np. mamy zbiór stalek i orzechów. Odwzorowujemy zapomocą krążków zbiór jeden i drugi. Okazuje się, że otrzymujemy np. tę samą figurę szeregu Borna. Zbiory są równe. Cały szereg ćwiczeń tu się nasuwa. Można przejść wszystkie figury szeregu Borna w pierwszym dziesiątku. Liczenia tu jeszcze niema, ale nic nie staje na przeszkodzie, by nazywać figury Borna: dwójką, trójką i t. p.

Zrozumiałem jest, że pedantyczne prowadzenie tego rodzaju operacyi może dzieci nudzić, ale przeplatane zabawą, rozmową i innemi rzeczami, przy rozmaitości zadań, figur różnych, rozmaitych przedmiotów odwzorowywanych, nudnem nie będzie. Być może, że plan tu naszkicowany posiada wa-

dy, które praktyka poprawić może, a luki uzupełnić; ale mam to głębokie przeświadczenie, że istota rzeczy ostać się musi i jest pożyteczna. Być również może, a tembardziej jest pożądane, by myśl tu wyłuszczona była rozwijana. Tu i owdzie w szkołach i w praktyce nauczania indywidualnego podobne rzeczy były i są stosowane (np. patrz H. Denzer: Schaffen und Lernen. Lipsk, 1909). O ile wiem, w szkołach macierzystych w Paryżu również coś podobnego robią. Nie znalazłem jednakże ani w sprawozdaniach, ani w artykułach w czasopismach, ani też w literaturze książkowej punktów wytycznych, idei głównej, którą jest rozwinięcie pojęcia odwzorowania (wspomina o tem przygodnie Hasse w swej metodyce rachunku początkowego (po niemiecku).

Na zakończenie przypomnę, że jak świadczą wiadomości o ludach żyjących w pierwotnem stadyum kultury, odwzorowanie odgrywa tam rolę np. w handlu zamiennym. Na linii demarkacyjnej z jednej strony mamy np. złożone orzechy kokosowe, na drugiej dajmy na to banany. Jeden z handlujących odkłada pewien zbiór bananów, a drugi orzechów kokosowych i przytem tak, że jednej albo parze jednostek jednego gatunku towaru odpowiada jedna, dwie, albo trzy jednostki drugiego. Przyrządy rachunkowe, jak szczoty, abakusy różnego rodzaju, stanowią już dalsze stadyum tego procesu, gdzie udoskonalenie polega na tem, że grupie określonej liczonych przedmiotów, np. 10, odpowiada na przyrządzie jedna przesuwana kulka.

ROZDZIAŁ III.

Teraz przejdziemy do nauczania w pierwszym roku w zwykłej szkole elementarnej (dzieci sześcio- lub siedmioletnie), ale zanim na przykładzie zillustrujemy sam sposób wykładu, zastanowimy się nad kilkoma ważnemi kwestyami.

Przedewszystkiem zakres nauki. Nie może on obejmować więcej, jak liczby od 1 do 20. U nas, niestety, jeszcze trzeba zaznaczać, że nigdzie zbytni pośpiech nie jest tak szkodliwy dla całego rozwoju umysłowego dziecka, jak w arytmetyce. Osiągane szybko rezultaty pozornie dobre są zwodne, wiedza jest nietrwała i nad wyraz mglista, wyuczona, skutkiem czego później tyle się zjawia dzieci „niezdolnych“ do matematyki, tyle nieprzyjemnych i próżnych wysiłków kosztuje uczniów i uczennice posuwanie się za „kursem“. Nie może być wątpliwości, że sprawdziany są trudne, ale tylko niedoświadczony i lekkomyślny nauczyciel będzie się tu śpieszył wtedy, gdy trochę wysiłku z jego strony nadać może przedmiotowi pożądaną rozmaitość, a uczniom dostarczyć trwałych podstaw. Procesów psychicznych przyśpieszać nie można; odbywają one taką samą ewolucyę, mniej lub więcej powolną, w różnych osobnikach, jak wszystko na świecie. Powstawanie pojęć liczbowych, ów kapitalny moment psychologiczny nauczania początkowego rachunku, jest rzeczą powolną i trudną. Sama wszak logika poucza, że liczby np. pierwszego dziesiątka mają fundamentalne znaczenie

dla wszystkich dalszych operacyi arytmetycznych. Nie chcieć się z tem liczyć i śpieszyć się tutaj, to albo nie rozumieć zupełnie rzeczy, albo łatwowiernie dać się zwodzić chwytliwości i nietrwałej pamięci dziecinnego wieku. Już doświadczenie poucza, że nader często uczeń, pozornie łatwo dający sobie radę z rachunkiem na początku, później, jakby stępiał całkowicie, nie umie wziąć się do prostych rzeczy, nie umie myśleć, ba, nawet nie czuje tego potrzeby. W pierwszym roku *stanowczo* nie można przechodzić więcej, sztuka zaś nauczania powinna polegać na tem, aby nuda nie wchodziła do pokoju szkolnego, a nauczyciel umiał zrobić przedmiot rozmaitym i interesującym. Taki pośpiech jest pozostałością dawnej dydaktyki mnemotechnicznej. Wszak dawniej jeszcze prędzej dochodzono do liczb dużych, i jak opowiada jeden z historyków, uczniowie zapominali dodawania, gdy byli w trakcie dajmy na to dzielenia, co wcale nie budziło podziwu. Jeszcze teraz, szczególniej przy zajęciach z kilkoma oddziałami, nauczyciel daje jednemu z tych oddziałów dla „zużytkowania czasu“ kilka liczb decymetrowej długości do dodawania. Zapewne, uczniowie siedzą „cicho“, ale czasu nie zużytkowują i pod względem umysłowym szkodzą sobie.

* * *

Spopularyzowane są już pojęcia o poglądowości w nauczaniu. Gdy się jednakże obeznamy z literaturą przedmiotu, a tembardziej z realizowaniem owej poglądowości w praktyce, znajdziemy wiele zdań różnych co do środków i zakresu poglądowego nauczania, znajdziemy również w owej praktyce nieraz pozory poglądowości, a nie samą jej treść. Wyliczymy i rozpatrzymy tu po kolei wszelkie możliwe środki do nauczania poglądowego.

a) Przedmioty i zjawiska świata otaczającego.

Bez wątpienia, blizkie zetknięcie z rzeczami codziennego doświadczenia nadaje nauce, tembardziej oderwanej, żywość, a dla umysłów nierozbudzonych wartość realną. Tak jest

wszędzie, w każdej dziedzinie wiedzy i ma też to znaczenie swoje, nie podlegające wątpliwości, w nauczaniu arytmetyki. W początkach pierwszych nauki, na tem stadyum rozwoju umysłowego dziecka, gdy nie operuje ono jeszcze wyrobionemi pojęciami, styczność blizka z przedmiotami doświadczenia zwykłego ma wartość podwójną: daje materyał poglądowy, dostępny dla umysłu dziecinnego i nadaje przez zastosowanie wspomnianą wartość realną. Przedmioty i zjawiska otaczającego świata mogą być używane w nauczaniu albo przez pokaz, albo też przez nadmienienie. Im większą rozmaitością przedmiotów konkretnych nauczyciel rozporządza i pokazać je może, przyczepiając do nich liczbę,—tem lepiej. Nie bójmy się zbytnio, aby uwaga dziecka za bardzo się rozpraszała; owszem barwność i rozmaitość podtrzymują jej napięcie, a wprawa nauczyciela potrafi przytem podkreślać to, o co chodzi, co jest ważne. W nauczaniu indywidualnem nawet przechadzka może być w odpowiedni sposób wyzyskana. Nie myślmy, aby tylko urzędowe godziny nauki robiły swoje: zwykle połowa ich idzie na marne—tak mówi przeciętne doświadczenie. Myśl trzeba łapać na gorącym uczynku, in statu nascendi, te bowiem chwile są najcenniejsze: w nich czasem rodzi się pomysł twórczy artysty, albo człowieka nauki, w nich też odbywa się owa tajemna a niezbadana dotąd praca samodzielna duszy dziecięcej, odbywa się jakby błyskami, przelotnie, jak gość pożądany przychodzi niespodzianie. Uczący niech chwyta te chwile, niech umie je wyczuwać.

Tak, barwność i rozmaitość nauczania są potrzebne; one są jak słońce, przy którem rośnie dusza dziecka. Kto rozczytywał się kiedy w poetycznie skomponowanych zadaniach indyjskich, gdzie pszczoły, kwiaty, perły i t. p. są przedmiotami, do których matematyk pierwotny przyczepia liczby i kombinacye, ten zrozumie, że barwność wykładu może mieć dużą wartość. Tylko w dojrzałej umysłowości wyróżniczkowują się odrębne dziedziny duchowe, które nabierają wartości jakby same przez się; u dziecka wszystko jest razem. Wielu uważa, że nadmienianie w zadaniach o przedmiotach

dziecku znanych (w najlepszym razie!) już wystarcza do poglądowości, i że dość ograniczać się na niewielu obrazach. Potrzebne tu jest stopniowanie i wychodzimy zawsze od tego, co można widzieć, słyszeć w danej chwili lub wogóle czuć, potem możemy mówić o rzeczach znanych dzieciom z doświadczenia, nakoniec o takich, które widziały na obrazku, o których słyszały z opowiadania. Najgłówniejszą jednakże rolę zawsze odgrywać winno to, co jest bezpośrednio dane. Oszczędzanie „okazów" jest pozostałością z czasów mnemonicznego formalizmu, który więcej cenił paragrafy książki, niż żywą rzeczywistość.

Nauczyciel powinien starać się o zachowanie w zadaniach rzeczywistych stosunków życia. Nieraz się zdarza, że dzieci rozwiązują zadania, do których wchodzą ceny np. towarów znanych nie mające nigdzie zastosowania, albo gdzieś w odległych miejscowościach kuli ziemskiej, lub w przeszłej albo przyszłej dobie historycznej. Zadań nie może układać ten, kto nie poznał w rzeczywistości tych stosunków, jakie stanowią treść zadania. O tem pomówimy nieraz później; tu wspominamy dlatego, iż rzecz ma bliższy związek z poglądowością.

Do przedmiotów naturalnych należą też organy naszego ciała, a przedewszystkiem palce, które, jak to stwierdzono niezbicie, odegrały w historyi rozwoju człowieka, w powstawaniu pierwszych pojęć liczbowych dużą rolę. Jak wiadomo, tak zwane cyfry rzymskie wyraźnie wskazują na swe pochodzenie z rachunku na palcach. Przytrzymując dużym palcem mały palec i 2 średnie i pozostawiając otwarty tylko wskazujący, mamy uzmysłowienie jedności; podnosząc do tego średni większy—uzmysłowienie dwójki; 2 średnie—trójki; a jeżeli podniesiemy wszystkie cztery prócz dużego, mamy uzmysłowienie czwórki. Wszystkie palce uzmysławiają piątkę, i jeżeli teraz złączymy cztery palce poczynając od wskazującego, otrzymamy obraz, przypominający piątkę rzymską. W ten sposób możnaby korzystać z jednej ręki przy nauczaniu; ale ponieważ w pierwszym dziesiątku trzeba będzie wziąć pod uwagę rękę drugą, nauczyciel, obróciwszy oby-

dwie dłonie w stronę klasy, może zaczynać od małego palca na ręce prawej; szóstym palcem będzie duży palec na ręce lewej. Ważne jest, aby dzieci też operowały na tym przyrodzonym przyrządzie i dlatego niektórzy radzą zaczynać rachunek od małego palca u ręki lewej, przyczem obydwie ręce znajdują się na pulpicie z dłoniami skierowanemi ku dołowi. W takich nawet drobnych pozornie rzeczach należy każdy szczegół obmyślić, gdyż nieporządne używanie jakiego środku gorsze bywa często, niż zupełne zaniechanie. Do tego ostatniego sposobu nauczyciel musi się też przystosować przez złożenie rąk na krzyż i zwrócenie dłoni ku sobie. Należy jeszcze zwrócić uwagę, że dotykanie pulpitu jest bardzo pożądane dla dzieci, ponieważ nawet starszy ma palce za mało nieraz posłuszne, aby mógł otworzyć tylko ten palec, który jest potrzebny.

b) Przyrządy rachunkowe.

Od wieków już obmyślano różne przyrządy rachunkowe do ułatwienia rachunku i zanotowania liczby oraz wykonywania działań. T. zw. „szczoty“ np. są udoskonaleniem tablicy rachunkowej (suanpana), używanej przed wiekami przez Chińczyków i Tatarów. Niemieckie „rechenbanke“ i „abakus“ też należą do przyrządów bardzo dawnych. Już w XVII wieku wielki filozof Leibniz rzuca myśl i daje wskazówki co do urządzenia maszyny rachunkowej, która dziś w udoskonalonej formie tak wybitne usługi oddaje, a w przyszłości jeszcze większe znajdzie rozpowszechnienie i zapewne w szkole znajdzie się w ręku każdego ucznia. Nauczanie początkowe ma oprócz dokładnego i szybkiego rachunku na celu głównie unaocznienie. Stąd wynika, że przyrządy rachunkowe nie mogą być złożone, nie może to być maszyna bardziej skomplikowana, gdyż samo jej urządzenie nie do uzmysłowienia elementarnych operacyi służyćby mogło, ale do zagmatwania. Trudno tu wyliczać wszelakie pomysły przyrządów, jakie w ciągu wieku XIX do unaocznienia początkowych operacyi arytmetycznych wynaleziono. Nie przechodzi rok jeden, aby kilku podobnych przyrządów nie zaproponowano z tej lub innej strony, jako narzędzia pomocni-

czego przy nauczaniu. Wszystkie te przyrządy wszakże posiadają jedną kardynalną wadę: jeżeli usiłują uzmysłowić działania, nie dają dobrego unaocznienia liczby z różnych względów i naodwrót. W razie zaś, gdy udaje się jako tako zrobić jedno i drugie, przyrząd jest tak skomplikowany i często nie tani, że o szerszem jego rozpowszechnieniu trudno mówić. Wypada nam więc zatrzymać się na dwóch przyrządach.

Pierwszy z nich jest skonstruowany w celu odtworzenia szeregu Borna. Jest to podłużna deska (1 metr długości i 4 decymetry szerokości), na której zrobiono z jednej strony 20 okrągłych wydrążeń w 2 szeregach poziomych (dłuższe brzegi deski ustawiają się poziomo), przyczem każde wydrążenie ma około $4^1/_2$ cm. w średnicy, a środki owych wydrążeń, zarówno należących do tego samego szeregu poziomego, jak i do sąsiedniego, znajdują się od siebie na odległości 9 cm. W środku deska przedzielona jest pionowo przyklejoną listewką na dwie części, z których każda posiada po 10 wydrążeń (wydrążenia te nie przechodzą na wylot). U dołu do deski przymocowane jest korytko, w którem składają się krążki drewniane, wchodzące łatwo w owe wydrążenia (ale nie całkowicie, bo nie możnaby było ich wyjmować). U góry do deski przymocowuje się listewka, na której można ustawiać różne przedmioty. Krążki są pomalowane z jednej strony np. na kolor ciemno-niebieski, z drugiej na czerwony, a deskę całą można też pomalować dajmy na to na ciemniejszy kolor zielony. Liczby uzmysławiamy, wkładając w wydrążenia krążki w ten sposób, jak to wynika z tworzenia szeregu Borna. Kolor dwojaki krążków służy do tego, by uzmysławiać działania, np. dopełnianie liczby lub rozkładanie jej. Gdy mowa o danej liczbie, znajduje się ona stale na przyrządzie, a na nim odbywają się również stale (na początku) te same operacye rachunkowe, jakie nauczyciel wykonywa z klasą. Uczeń, który w kursie wstępnym zapoznał się z szeregiem Borna, znajdzie go tu znowu, ale dalej już wykonywać będzie dokładniejszą analizę przedstawionych obrazów.

Opisany przyrząd pomocnym może być tylko w pierwszym roku nauczania. Dobrze jest wspomnieć tu przy sposobności, że deska przyrządu może być podzielona cienkiemi liniami koloru czarnego na decymetry kwadratowe. Obraz tego podziału utkwić może w pamięci uczni i potem przy sposobności łatwo go przypomnieć. Dla dalszych stadyów nauczania najwygodniejszym przyrządem są szczoty w dużym formacie, pozbawione oczywiście niepotrzebnych kulek, które powinny mieć znaczną wielkość, aby oko łatwiej je oddzielnie chwytać mogło. Dla przeciętnej klasy wystarczą 3 cm. średnicy. Ponieważ przejście od jednego przyrządu do drugiego nie powinno być raptowne, nauczyciel powinien stopniowo już w pierwszym roku przechodzić od jednego do drugiego, pokazując na szczotach te same operacye, szczególniej w dziesiątku drugim, co i na pierwszym przyrządzie. Należy przytem na szczotach uwzględnić to udoskonalenie, jakie wprowadził Schneider, polegające mianowicie na tem, że kulki na szczotach są pomalowane 2 barwami: jedna półkula na jasno-żółty kolor, druga na czerwony, pomalowane w ten sposób, że każdą kulkę można przesuwać wzdłuż drucika, pokazując tylko jeden jej kolor. W razie działań, np. jak powyżej dopełniania i rozkładania, odpowiednie kulki obracamy dokoła drutu i występuje kolor odmienny. Szczoty mają duże braki, np. po wykonywaniu działań z większemi liczbami niewidoczne jest, z jakiemi liczbami to działanie było wykonane, wyraźny jest tylko rezultat. Pomimo to prostota cechująca ten przyrząd przemawia za jego wprowadzeniem. W praktyce za granicą używają czasem szczotów zmodyfikowanych, w których druty biegną pionowo. Komplikuje to przyrząd, ale ma tę wygodę, że lepiej uzmysłowiony jest system pozycyjny.

Zwrócę tu uwagę czytelników na jedną rzecz, która może wywołać pewne nieporozumienie. W kursie wstępnym zatrzymaliśmy się na szeregu Borna dla nadania określonym zbiorom pewnych poglądowo ujmowanych cech charakterystycznych. Dalej w pierwszym roku polecam używanie szczotów obok pierwszego przyrządu, jakkolwiek szczoty są opar-

te na zwyczajnym szeregu, t. j. kulki następują jedna za drugą. Ten szereg poprzedzał obrazy Borna we wstępnym kursie, a tu znowu następuje po nich. Stąd właśnie nieporozumienie możliwe, a jednakże pozorne. Nie chodzi mi o wdrożenie w pamięć ucznia owych obrazów liczbowych i rachunek w wyobraźni na ich tle, a jeżeli obrazy te się wdrożą (bo będzie na to czas) i, co ważniejsza, pomogą któremu z uczniów, tem lepiej. W kursie wstępnym przejście od szeregu zwykłego do szeregu Borna było wywołane wprost fizycznemi właściwościami elementów odwzorowujących (klocki i krążki), chodziło o wyodrębnienie zmysłowe różnych zbiorów, ale specyalnym figurom jakimś znaczenia osobliwego nie nadawałem. W t. zw. pierwszym roku nauczania powstaje pojęcie liczby, a więc konfiguracya ta lub inna specyalnej roli nie odgrywa.

c) Zapisywanie liczb.

Uważam to za środek poglądowy, gdyż sądzę, że ręka ucznia przejść musi te same stopnie rozwojowe, jak i myśl przez oko. Może się źle wyraziłem, ale chodzi o podkreślenie znaczenia pracy ręcznej jako środka poglądowego i o jednolitość w traktowaniu różnych czuć. Jeżeli oko ujmuje — sit venia verbo — „liczbę konkretną", to ręka w sposób odpowiedni odwzorowuje ten konkret. Myśl dorasta do pojęcia i operować zaczyna świadomie słowem; ręka wtedy pisze zwyczajne cyfry. Doskonalsza odpowiedniość pomiędzy szeregami czuć, z jednej strony wzrokowych, z drugiej mięśniowo-ruchowych, jest konieczna dla naturalności, równowagi, wzajemnego wspierania się i harmonii rozwojowej. Na to zwykle nie zwraca się uwagi. Z drugiej strony organizm młody, rosnący, o mało rozwiniętej woli i koncentracyi uwagi, szybko się, że tak powiem, dezoryentuje. Fala energii nerwowej przelewa się z jednego pola pracy do drugiego, a jeżeli dzieci nie mają rąk zajętych jaką czynnością, trudniej skupiają uwagę. Jako środek zaradczy widziałem stosowane zakładanie rąk z tyłu na krzyżu, przyczem nauczycielka, wałkując w nudny sposób jakieś liche zadanie, chciała przez całą godzinę niemal w takiem położeniu utrzymy-

wać dzieci. Torturowanie miewa jeszcze swoje atawistyczne przebłyski. Jako środka do skupiania uwagi uczniów przy rachunku wielki Pestalozzi używał poprzednio dostatecznie zmechanizowanej pracy ręcznej. Oczywiście środek ten może być w szkole stosowany, ale do tego taka zmechanizowana praca ręczna jest potrzebna. Prócz niej, albo jeżeli jej wogóle niema, niestety, należy używać innych środków, mianowicie odpowiedniego zapisywania liczb. Przedmiotowi temu tu parę słów poświęcimy.

Odpowiednio do pierwszego ze wspomnianych przyrządów, dzieciom można rozdać tabliczki tekturowe, na których, tak jak na desce wydrążenia, wykreślone są kółka. Prócz tego dzieci posiadają krążki tekturowe, pomalowane odpowiednio do wspomnianych krążków drewnianych, i te krążki w taki sam sposób, jak na tablicy, nakładają. Ponieważ przy rachunku ciągle odbywają się zmiany z liczbami, dzieci muszą być ciągle zajęte. To pierwsza faza.

Dalej na tabliczkach szyfrowych lub na papierze ołówkiem dzieci mogą stawiać kreski w szeregu zwyczajnym albo kółeczka. Tutaj należy podkreślić niemożliwość np. podobnego oznaczenia:

$$||||+|||=|||||||$$

„Plus" zjawia się wtedy, gdy występuje cyfra i jest znakiem działania. Tu nie mamy liczb, lecz grupy kresek, oznaczenie takie może więc wprowadzać zamęt w pojęciach. Wogóle dokładność i ścisłość nie przeszkadzają łatwości.

Kółeczka mogą być stawiane w postaci obrazów Borna, albo w szeregu, a zmiana barw oznacza się tem, że jedne kółeczka są zakreskowane, a drugie nie.

Następnie możemy przejść do układania z kresek różnych figur i cyfr, a nakoniec do zapisywania ich linią ciągłą.

d) Obrazki i ryciny.

Jedną z zalet dobrego nauczania jest umiejętność korzystania z każdej okoliczności, a tembardziej takiej, która nasuwa się siłą rzeczy. Wcześniej czy później książkę do rę-

ki uczeń dostaje, a stąd wynika, by ta książka zawierała najwięcej pouczającego materyału, by układem swym odpowiadała naturze umysłu dziecka. Książki arytmetyczne, szczególniej nasze, są suche i nudne, przepełnione kolumnami przykładów liczbowych, zadań często nieumiejętnie dobranych albo peror teoretycznych, które zdradzają małe przygotowanie do tego rodzaju twórczości. Jeżeli popularyzowa nie wiedzy jest jakby stwarzaniem jej na nowo, to dobry podręcznik zawsze jest pisany jak dzieło głębszej nauki i sztuki, przez ludzi talentu, ludzi żywych i umiejących niejako wczuć się w jaźń duchową dziecka. Dobra książka jest żywa. Żywość tę jej wzmagają dobre illustracye, obrazki rysowane ręką artysty, a nie byle rysownika. Taki obrazek może przedstawiać nawet jaką scenę z życia, jedną chwilę, jeden moment kalejdoskopowej jego zmiany, ale tak uchwycony moment, tak ułożony, by mała pomoc uczącego wystarczała uczniowi do znalezienia tam treści arytmetycznej. Czy to jest szkodliwe? Nikt chyba tego powiedzieć nie może. W takim razie obojętne? Również nie, bo obrazek taki uzmysławia liczbę, wdraża się łatwo w pamięć, ożywia naukę, niejako nawołuje do szukania liczby nawet w dalekich pozornie od niej okolicznościach. Budzi on myśl, obserwacyę, a z tej racyi czyż może być obojętnym? Książeczki do nauki rachunku dla dzieci francuskie i amerykańskie są przepełnione tego rodzaju illustracyami i jest tu pole bardzo wdzięczne dla władców ołówka. Nasze wydawnictwa dla dzieci w ostatnich czasach ożywiły się i ulepszyły między innemi przyczynami dzięki temu, że produkcyi tej dotknęła się ręka artysty. Niechże to dotknięcie rozszerzy się i pogłębi, a wniesie ono nawet w szary świat liczb barwę i życie.

*
* *

Do ważnych rzeczy przy nauczaniu rachunku początkowego należy również używanie słowa, terminologia. Racyonalna dydaktyka musi utrzymywać odpowiedniość doskonałą pomiędzy słowem a myślą. Słowo musi być wykładnikiem

faktu psychicznego, a nie pustym dźwiękiem, jak to, niestety, nieraz bywa przy panującym tu i owdzie werbalizmie. Nadzwyczajnie trudno ustrzedz się tego pierworodnego grzechu dydaktycznego. Nauczyciel, człowiek starszy, mający inne pojęcia, operuje odruchowo słowami, które dla niego są pełne treści, a jakże często o sto mil się znajdują od myśli dziecka. Nawet wtedy, gdy uczący zdaje sobie sprawę ze swego postępowania, usiłuje przystosować się do poziomu dzieci, nawet wtedy często błądzi, bo przecież nic dziwnego: tak trudno jest zdać sobie sprawę z tych rzeczy przy naszej małej znajomości natury dziecka i przy wadach naszej własnej natury. Wszak wiemy, że przystosowywanie się wymaga wysiłku, a tu trzeba je robić z uśmiechem, naturalnie i przytem nie strzelać w pustą przestrzeń. Dlatego też potrzebna jest wielka w tej dziedzinie ostrożność.

Ponieważ na początku mamy do czynienia z t. zw. arytmetyką zmysłową, więc w niektórych wyrażeniach słownych zupełnie jest zrozumiała i dozwolona pewna swoboda, zależna od charakteru nieraz rozpatrywanych konkretnych zbiorów. Jeżeli np. na przyrządzie zwiększamy liczbę krążków lub kulek, możemy powiedzieć „dokładamy“, opiszemy bowiem w sposób wyraźny ten fakt, jaki zachodzi. Inne znowu wyrażenia, jak np. mniej, więcej, równo, wiele, nic, o ile, zmniejszyć, zwiększyć, ile razy, nazwy liczebników, zmianie nie ulegają i konkretne przykłady wyjaśniają tylko ich treść. Nawet zaleca się w pierwszym przypadku używanie rozmaitych słów, znanych z praktyki codziennej, w odniesieniu do przedmiotów konkretnych, ujmowanych zmysłowo lub omawianych w zadaniach. Tak samo jak rozpatrywanie najrozmaitszych zbiorów o pięciu przedmiotach prowadzi do pojęcia liczby 5, wspomniane nazwy prowadzą do terminu używanego przy działaniach na liczbach t. zw. oderwanych (patrz niżej Rozdz. V). Liczba nazw się zmniejsza, gdy myśl wykryje identyczność ich treści logicznej; ale ta myśl musi to wykryć, i w tem jest niemałe zagadnienie dydaktyczne. Weźmy parę przykładów.

Każdy wie, że równania $a + b = x$ i $a = b + x$ nie wy-

magają żadnych innych działań dla wykrycia x prócz dodawania i odejmowania, ale dla początkującego matematyka nie jest to jasne. Wykonywamy więc z nim razem działania dopełniania i rozkładania, póki nie zrozumie ich identyczności z poprzedniemi działaniami. Znany jest również dwojaki charakter dzielenia, który wyrażają przez słowa „dzielenie" (na równe części) i „mierzenie" albo „mieszczenie". Taka dwoistość jest znowu dotąd potrzebna, póki uczący się nie zrozumie ich formalnej jednakowości. Mamy tu przykłady syntezy myślowej, którą poprzedza drobiazgowy, na konkretnych przykładach wsparty proces analityczny.

* * *

M o n o g r a f i c z n e t r a k t o w a n i e l i c z b stanowi w metodyce ważną i trwałą zdobycz, którą zawdzięczamy głównie Grubemu. Niema obecnie kierunku w metodyce, któryby przynajmniej w głównych zarysach nie przyznawał, że monograficzne traktowanie liczb pierwszych 2 dziesiątków jest potrzebne i celowe. Rzecz ta i u nas jest dość rozpowszechniona, co w niemałej dozie zawdzięczać należy ś. p. Jeskemu. Ponieważ znajomość liczb pierwszego dziesiątka stanowi podstawę dalszego rachunku, gruntowne poznanie ich jest niezbędne; a takie poznanie można osiągnąć tylko w ten sposób, że każdą z liczb będziemy dokładnie rozpatrywali zosobna, gdyż zjawia się ona przed umysłem dziecka jako fakt oddzielny. Tutaj warto zwrócić uwagę na jedną rzecz wielkiej doniosłości. Na czem polega prócz innych rzeczy nasza pewność i łatwość w wytwarzaniu liczb szeregu naturalnego i działaniach? Na zrozumianych i stosowanych niemal automatycznie pewnych jednostajnych, stałych prawach, rządzących w świecie liczb. Wiemy, jak się wytwarzają następne liczby szeregu naturalnego, zrozumieliśmy prawidłowość tu panującą, poznaliśmy sposoby wykonywania działań, stąd nasza pewność. Tego wszystkiego dziecko nie ma: każda liczba występuje wobec tego jako zjawisko oddzielne, należy więc powiązać ją z sąsiedniemi liczbami, wykryć prawidłowości pew-

ne i t. d. Ciekawe jest, że gdy człowiekowi władającemu dokładniej rachunkiem zwyczajnym, a nawet wyższą teoryą liczb, napiszemy bardzo dużą liczbę i zapytamy go o jej własności, trudno sobie z tem radzi: musi wykonywać cały szereg badań, aby oznaczyć np., czy liczba jest pierwszą, czy nie. W takiem samem położeniu, a nawet jeszcze trudniejszem, jest dziecko wobec liczb pierwszego dziesiątka.

Nie wątpimy o znaczeniu monograficznego traktowania liczb, ale powinniśmy się zastanowić, w jakiej formie to prowadzić. Tu właśnie występują u różnych metodyków różnice i niezgodność poglądów, wobec czego należy stanowisko nasze wyraźnie zaznaczyć.

Co to znaczy poznać liczbę? Przedewszystkiem wytworzyć sobie pojęcie tej liczby. Ale jakże można wytworzyć to pojęcie w oderwaniu od innych liczb, bez związku z niemi i porównania? O ile z historycznych danych możemy wnioskować, człowiek najpierw posiadał trzy pojęcia: jednego, dwóch i wielu. Przejawia się to w t. zw. liczbie podwójnej, którą spotykamy w językach starożytnych. Pojęcie jednego nie mogło się najpierw samo wytworzyć, gdyż brakowało tu porównania z innym, bodaj jednym objektem tej samej kategoryi. Gdyby świat był jednokolorowy, czy mielibyśmy pojęcie koloru? Czy fizyk stwarzałby swoje teorye wibracyjne?

A jeżeli tak, to w czem te związki między liczbami się wyrażają? Wyrażają się one w działaniach, w sposobach przejścia od jednej liczby do drugiej. Poznanie liczby niemożliwe jest bez działań. Wobec tego Grube radził odrazu stosować do każdej niemal liczby wszystkie działania arytmetyczne. Pytanie teraz polega na tem, czy należy stosować wszystkie działania odrazu, czy też również wprowadzić tutaj stopniowość i dawać tylko to, co jest istotnie ważne. Historya daje wskazówki, że „wszystkie działania“ nie odrazu się rozwinęły. Są ślady nawet w dziełach dużej miary matematyków, jak np. znany autor wiekopomnego dzieła „Elementy“ — Euklides, że t. zw. podwajanie uważane było jakby za działanie osobne. Zresztą czytelnik więcej z rzeczą

obeznany zrozumie, że liczba działań jest rzeczą poniekąd względną, że w arytmetyce jest więcej działań, niż cztery, np. pierwiastkowanie, logarytmowanie. Odgrywa tu wielką rolę znaczenie praktyczne (w szerszym stylu) danej operacyi arytmetycznej. W arytmetyce początkowej chodzi, mówiąc ogólnie, o wytworzenie szeregu naturalnego. Gdybyśmy abstrahowali od systemu pozycyjnego (t. zw. zwykłego pisania liczb), od opartego na tem udogodnienia w wymawianiu tychże, do wytworzenia szeregu naturalnego, potrzebne byłoby tylko jedno działanie — dodawanie, a w rachunku wstecznym—odejmowanie.

Te właśnie dwa działania stanowią podstawę, szczególniej w pierwszym dziesiątku, gdzie sam charakter liczb nie wymaga innych działań. Z tego bynajmniej nie wynika, abyśmy w konkretnej formie w zadaniach lub pytaniach nie poruszali jednego albo drugiego działania; ale należy tu zachować stopniowanie. Mnożenie zjawiać się winno, ze względów ekonomii pracy, jako skrócone dodawanie, np. $3+3+3=9=3$ razy 3, ale oprzeć się musi na poprzedniem dodawaniu. Tak samo t. zw. mierzenie poprzedza odejmowanie gruntownie poznane. Nauczyciel sam wyczuje, kiedy dostateczna znajomość dodawania i odejmowania pozwoli mu na tego rodzaju rozszerzenie. W tem więc z Grubem nie możemy się zgodzić; działania również wymagają stopniowego traktowania, nie są wszystkie niczem pierwotnem, a wyrastają na tle dojrzewania myśli arytmetycznej. To jedno.

Po drugie: nie możemy się zgodzić z tem, jak to się zwykle robi, że po wykonaniu szeregu pewnych operacyi: liczenia, dodawania, odejmowania i t. p., przy każdej oddzielnej liczbie dochodzimy do jej pojęcia. Np. zadajemy szereg pytań, przykładów i t. p. i oto dochodzimy do pojęcia jedności, potem tak samo dwóch i t. d. Wydaje mi się więcej racyonalnem podzielenie pierwszego dziesiątka na 2 części od 1 do 5 i od 5 do 10. Pierwszą część przechodzimy dwa razy. Pierwszy raz li tylko na konkretnych przykładach przerabiamy wszelkie czynniki uzmysławiania, działania i t. p., a drugi raz przechodzimy do t. zw. liczb oderwanych i wpro-

wadzić możemy nawet właściwe znaki piśmienne. Takie postępowanie dwustopniowe wydaje mi się racyonalniejszem dlatego, że na pierwszym stopniu uczeń zapoznać się może w formie konkretnej z szeregiem liczb, pozna namacalnie związki i działania, będzie więc miał skalę porównawczą, a wtedy dopiero może być mowa o pojęciu każdej z tych liczb oddzielnie. Drugą część liczb traktujemy już według Grubego, z powyższem zastrzeżeniem co do działań.

Po trzecie: Grube za daleko posunął swoją metodę, radząc nawet liczby pierwszej setki traktować, co prawda prędzej, ale monograficznie. Nawet już w drugim dziesiątku dużo rzeczy się powtarza takich, jakie znane były i przerobione w pierwszym, a działania wogóle z liczbami dwucyfrowemi wymagają stopniowań, ale opartych na innych zasadach. Wobec łatwo dostrzegalnej jednostajności tworzenia liczb i powtarzania się przy działaniach znanych procesów, monograficzne traktowanie według Grubego jest tu zbyteczne. Co je zastąpi, zobaczymy niżej.

Po czwarte: należy się zastrzedz wogóle co do pedanteryi w monografii oddzielnej liczby. Uczeń, słysząc często tę samą odpowiedź, odruchowo, nie myśląc gotów ją dawać; i dlatego należy pytania urozmaicać przez powtarzanie dawnego.

* * *

Przy praktycznem wykonaniu wspomnianych powyżej wskazówek wielką rolę odgrywają zadania konkretne i przykłady liczbowe. Przeciętne podręczniki początkowej arytmetyki są wprost przepełnione całemi drabinkami przykładów liczbowych. To wygląda tak, jakbyśmy doradzali wykonywanie kunsztownych skoków tym ludziom, którzy nie umieją chodzić. Przykład liczbowy jest jakby zakończeniem całego procesu poznawania liczby, a stąd wynika, że powinien zjawiać się po unaocznieniu, po zadaniach na przedmiotach obserwowanych i wogóle zagadnieniach z treścią konkretną. Uczeń, który przerabia przykład liczbowy, musi już

mieć gotowe pojęcie liczby, a to przecież jest zadaniem głównem. W jakiż sposób zapomocą przykładów liczbowych samo to pojęcie zdobyć można? Ciekawe jest, że nawet wytrawni metodycy niemieccy błąd ten często popełniają. Pochodzi on stąd, że ci metodycy stosują tak zwane stopnie formalne przy nauczaniu. Treść nauczania dzieli się na drobniejsze i większe całostki jakby w sobie zamknięte i każdą z tych całostek wprowadza się do świadomości ucznia określonym z góry sposobem formalnym. Taka całostka nazywa się jednostką metodyczną. Np. w naszym przedmiocie jednostką metodyczną może być każda oddzielna liczba pierwszego dziesiątka (jakkolwiek i tu może być dalszy podział).

Głośny w Niemczech dydaktyk Ziller, rozwijając teoryę Herbarta, przyjmuje w podstawie formalnego procesu nauczaniu 5 głównych stopni: analizę, syntezę, asocyacyę, system i zastosowanie. W naszym przedmiocie pierwszy stopień polegałby na przygotowaniu do ujęcia liczby danej, więc powtórzeniu poprzedniego; drugi na wprowadzeniu nowej liczby; trzeci na działaniach prowadzących do tej liczby (np. 3 krążki i 3 krążki to 6 krążków i t. d., gdy chodzi o liczbę 6); czwarty właśnie na przykładach liczbowych, jako systematyzowaniu zdobytych wiadomości; a piąty na zastosowaniu tych wiadomości do zadań konkretnych. Niewolnicze zastosowanie tych stopni formalnych prowadzi mianowicie do podobnego uszeregowania oddzielnych momentów. Należy tu zaznaczyć, że stopnie Zillera, jakkolwiek szeroko są rozpowszechnione w Niemczech, w praktyce coraz częściej wywołują krytykę. Wielu wybitnych dydaktyków podaje swoje stopnie formalne, tak iż zgody tu niema. Kwestya jest otwarta, czy owe stopnie formalne mogą być stosowane ogólnie do wszelkich przedmiotów i jakiemi wogóle być winny. Rzuca się odrazu w oczy, że porządek w tej dziedzinie być musi, ale ten porządek wytworzyć można, opierając się na znajomości logicznej konstrukcyi przedmiotu, metod badania ludzkiego i na dokładniejszych wiadomościach z psychologii.

Czy to wszystko już jest? Odpowiedź jasna, stąd właśnie owe różnice w poglądach.

O ile rzecz dotyczy nauczania rachunku, nie uważamy, aby stopnie formalne Zillera były całkiem przydatne. Należałoby przestawić moment czwarty i piąty. Teoretycznie rzecz biorąc, wydaje się naturalnem, że stosować można tylko wiadomości posiadane, ale tylko teoretycznie i to w odniesieniu do przedmiotów może głównie filologicznych. Trzeba inaczej rozumieć „zastosowanie". Są rzeczy, których bez zastosowania odrazu nauczyć się nie można i takie rzeczy coraz częściej występują w polu świadomości jasnej spółczesnego człowieka, odkąd coraz wyraźniejszem się staje dla ludzi, jaką rolę w poznaniu odgrywa doświadczenie. Nie jest tu mojem zadaniem wdawać się w głębszą krytykę stopni formalnych Zillera, gdyż wymagałoby to bardzo wiele miejsca i poważnego traktowania; zaznaczę tylko jedno, że w rachunku początkowym uczymy się stosując i stosujemy ucząc się. Przez zastosowanie samodzielne urabiają się nasze pojęcia, a nie hypotetyczne. W zasadniczym procesie poznania liczby, w tworzeniu się jej pojęcia zastosowanie odgrywa taką samą rolę, jak własnoręczna gra na fortepianie dla tego, kto się tej gry rzeczywiście nauczyć pragnie. Stąd też zadania konkretne muszą występować wcześniej, niż przykłady liczbowe.

Zadania konkretne winny brać pod uwagę stosunki realne otaczającego życia. W ten sposób dają one mocne tym stosunkom oświetlenie, poruszają sferę naturalnych zainteresowań dziecka, budzą jego myśl i zdolność obserwacyjną. „Więc powiadasz pan, że nad morzem muszą być inne zadania, a w górach znowu inne?" — zarzuci mi zwolennik uniwersalnej nauki rachunku.—Ależ tak — odpowiem, napewno tak na każdym stopniu elementarnego nauczania, a tembardziej na pierwszym. Tam, gdzie linie życia się schodzą, tam i zadania będą te same; a przytem w tej materyi tak samo istnieć winno stopniowanie: rozszerza się horyzont myśli ucznia, rozszerza się również zakres zagadnień, ale najpierw zacznijmy od tego, co go otacza. Czy nauka co straci na

tem? Nie tylko nie straci, ale wygra, bo się na trwalszych oprze podstawach, przez zmysły niejako wejdzie do wnętrza. Cześć mam wielką dla wielkiej nauki matematycznej, ale dlatego właśnie może widzę jej znaczenie, budzące duchowo i praktyczne na każdym kroku życia. Przypomina mi się nieraz obraz zapalonego przyrodnika-nauczyciela, który w pierwocinach swej praktyki rad byłby bodaj w 3-ej klasie rozwijać teoryę ewolucyjną i dziwy pochodzenia gatunków. Teraz on wie, że taki deser byłby czczy bez pożywniejszego obiadu faktów konkretnych.

Dobrze jest, gdy nauczyciel, znając wspomniane stosunki realne, sypać może zadaniami jakby z kieszeni, ale tego trudno wymagać. Stąd potrzeba dobrych zbiorków dla nauczyciela, póki uczeń czytać nie umie, a później i dla ucznia.

Przechodzimy do przykładów liczbowych, jeżeli wszelkie możliwe kombinacye działań zostały należycie na konkretnych przykładach i zadaniach przerobione, przyczem dość wspomnieć jeden taki przykład, aby można było przejść do formy ogólnej przykładu liczbowego, który uczniowie zapisują rysikiem, ołówkiem lub nawet piórem. W ten sposób przerabiamy wszystkie, systematyzując zdobyte wiadomości. Nie znaczy to, cośmy powiedzieli przed chwilą, aby jednocześnie nie można było przerabiać zadań konkretnych. Wogóle należy pamiętać, że systematyzacyi nigdy nie powinno być za dużo i że rozmaitość stawianych zagadnień podtrzymuje uwagę, tembardziej jeżeli zadanie wspomniane odpowiada przykładowi liczebnie.

W końcu nauki pierwszego dziesiątka wprowadza się zwykle komplikacyę działań, przyczem w grę wchodzą nie tylko dwie liczby, ale kilka połączonych różnemi działaniami. Tu znaczenie pisania występuje wyraźnie, i właściwie nie byłoby wielkiej szkody, gdyby w tym właśnie momencie uczniowie zapisywać liczby cyframi zaczynali. Komplikacya działań jest naturalnem przejściem do liczb drugiego dziesiątka, stanowiących podstawę systemu pozycyjnego pisania

liczb i wymawiania, a zarazem powtórzeniem i konieczną wprawą, zmechanizowaniem wiadomości zdobytych.

* * *

Pozostaje nam jeszcze z tych kwestyi głównych, jakie w tym rozdziale omówić zamierzaliśmy, zagadnienie traktowania liczb drugiego dziesiątka. Występują tu tak ważne charakterystyczne cechy, że opuścić je byłoby rzeczą nieracyonalną. Te rzeczy teraz zamierzamy poruszyć.

Pierwszą zasadniczą cechą, odróżniającą dziesiątek drugi od pierwszego, jest wystąpienie nowej jednostki — dziesiątka. Z tym faktem liczyć się tu trzeba przy wykonywaniu wszelkich działań prowadzących do liczb 2-go dziesiątka, a z drugiej strony jest on tak ważny, że gruntowne jego przyswojenie przez uczniów jest niezbędne. Weźmy najpierw jakikolwiek przykład. Dajmy na to, mamy wykonać dodawanie: 6 + 7. Dodawanie takie składa się z następujących momentów: 1-o skonstatowania liczby potrzebnej do tego, by dopełnić 6 do dziesiątka, 2-o rozłożenia 7 na dwa składniki: 4 i 3, 3-o dodania 4 do 6, a 3 do 10. Stąd widoczne jest przedewszystkiem, że do szybkiego wykonania tych działań w pamięci konieczne jest gruntowne władanie działaniami w zakresie pierwszego dziesiątka, t. j. konieczne jest tutaj dodawanie szybkie grupami jedności bez pośrednictwa liczenia, które było potrzebne i ważne w dziesiątku pierwszym. Tutaj liczenie byłoby tylko przeszkodą skutkiem większych liczb. Wyseparowanie dziesiątka jest celowe również z tego powodu, że poglądowe przedstawienie liczb jest już utrudnione dla przyczyny wspomnianej. Na przyrządzie jednym i drugim z nadmienionych można z łatwością działania uzmysłowić, idąc w kolei wskazanej powyżej. Więc najpierw układamy 6 krążków (lub kulek), potem uzupełniamy do 10 innym kolorem. Uczniowie widzą, ile brakuje do 7. Znów uzupełniamy liczbę krążków w tym samym kolorze i nakoniec cały dziesiątek układamy jednym kolorem. Wogóle na przyrządzie należy się starać dla podkreślenia zna-

czenia dziesiątka układać go w odmiennym kolorze, niż dołączone jedności.

Uzmysłowienie liczby jest tu trudniejsze i dla nauczyciela i dla ujęcia dzieci, a dlatego traci już na wartości. Cóż je zastąpić częściowo jest w stanie? Pytanie to bardzo ważne z tego powodu, że koniecznie trzeba zdać sobie wyraźnie sprawę w tej materyi. Zastępuje je moment logiczny, powiadam, rozumowanie. Bo czyż nie jest rozumowaniem przerobienie świadome w myśli wskazanych trzech momentów np. przy dodawaniu? Rzecz ważna, aby to istotnie było świadome rozumowanie. A czegóż do tego potrzeba? Prócz szybkiego wykonywania działań, koniecznej wprawy w dopełnianiu i rozkładaniu liczb, potrzebna jest znajomość faktu, że rezultat dodawania nie zależy od porządku dodawanych składników. Bo czyż tak nie jest? Dopełniamy 6 do 10 przez dodanie 4, a następnie dodajemy 3. Stąd wynika, że zamiast dodać 7 odrazu, dodajemy składniki 7 i przytem tak, jak nam jest wygodniej. Pytam się, czy ten fakt nie powinien być świadomie przez ucznia wykonany? Według mego przekonania, tak; inaczej bowiem będziemy już na początku mieli sztuczki metodyczne zamiast świadomego rachunku. Ciekawe jest, że metodycy niemieccy, którzy tak lubią powoływać się na znane zdanie Hentschela: „uczeń powinien myśląc rachować i rachując myśleć“, nie zwracają na to większej uwagi. Przyczyna znajduje się w tem, że metodycy w nauczaniu wszędzie widzą psychologię, nawet tam, gdzie potrzebna jest przedewszystkiem logika. Trudno mi to bliżej tutaj wyjaśniać, a przytem czytelnik zrozumie znaczenie rzeczy bez tych rozważań o przyczynach. Jestem więc zdania, że dlatego, aby w drugim dziesiątku dodawanie wykonywane było że świadomością, należy fakty: 1-o dodawania kolejnego składników zamiast całej ich sumy, 2-o niezależności sumy od porządku składników, jeszcze w pierwszym dziesiątku na zadaniach konkretnych, przykładach z przedmiotami i liczbowych podkreślać i wyjaśniać. Fakty te nie są same przez się zrozumiałe. Wszak dla dziecka początkującego nie jest wszystko jedno, czy $4 + 3$, czy $3 + 4$.

Fakt ten nazywa się w arytmetyce teoretycznej p r a w e m p r z e m i e n n o ś c i o w e m, a dodawanie składników zamiast jednocześnie sumy figuruje często jako jedno z twierdzeń. Te same uwagi stosować należy i do odejmowania. W tym przypadku powołujemy się na tę własność odejmowania sumy, że można po kolei odejmować składniki, co też przy nauce pierwszego dziesiątka musi być przez uczącego odpowiednio zaznaczone.

Monograficzne traktowanie liczb traci tu również sporo na swej wartości. Naturalnie, nauczyciel stopniuje liczby, nie prowadzi rzeczy bezładnie, bo nigdzie tak nie ma znaczenia stare przysłowie łacińskie: festina lente (śpiesz się powoli), jak tutaj. Ponieważ Grube wszystkie działania niemal od początku wprowadzał, w drugim dziesiątku u niego też była przeprowadzona dokładna monografia.

Zapewne, jak na pierwszy rok, niemały to program (u nas wobec domniemanej genialności naszych dzieci może i za mały!), ale stosując się do zasady uczenia uczniów, a nie przechodzenia programów, nauczyciel doświadczony i trzymający dłoń, że tak powiem, na pulsie klasy, zrobi tyle, ile będzie można, t. j. może z r o b i ć m n i e j, a w nauczaniu indywidualnem czasem więcej *). Pamiętać zawsze należy, że to są podstawy, rzeczy niezmiernej doniosłości dla całego gmachu matematyki, że tylko trzeba umieć znaleźć, aby widzieć tu tyle rzeczy wartości zasadniczej, że dziwić się tylko trzeba, jak ludzie dla ślepego, mechanicznego wykony-

---

*) Wydaje mi się naturalnem i nie obciążającem kursu w lepszych warunkach nauczania indywidualnego wprowadzenie w całej rozciągłości mnożenia liczb przez 2, czyli podwajania, a więc pierwszego stopnia t. zw. tabliczki mnożenia. Zarówno dodawanie liczb pierwszego dziesiątka, jak i mnożenie ich przez 2 zamykają się w tym zakresie, i nie widzę przeszkód żadnych natury dydaktycznej, któreby nie pozwalały, jak sądzą niektórzy metodycy, piszący li tylko dla szkoły elementarnej, wprowadzić podwajania. Rozróżnianie liczb drugiego dziesiątka wobec osłabienia poglądowości jest już więcej sprawą formalną, a tem samem dodanie przynajmniej jednego z takich kryteryów odróżniania może być pożyteczne. Wprowadzenie mnożenia wywołuje danie pojęcia o dzieleniu, znajdywaniu połówek, ćwiartek, a także o rozróżnianiu liczb parzystych i nieparzystych.

wania działań i rwania się pozornego w tym kierunku młodzieży poświęcają kwestye wielkiej doniosłości dla ich żywej myśli i rozwoju duchowego. Wszak maszyna rachunkowa zawsze sprawniej będzie liczyła, bo nie zna afektów, nie ma zmysłów i życia psychicznego, które czasem myśl odciąga w stronę i powoduje omyłki. Dla tego, który objąć jest w stanie szerszą dziedzinę nauki, jest zrozumiałem, jaką wartość ma pierwszy i drugi dziesiątek. Nie trzeba do tego powoływać się aż na psychologię.

Zakres zadań konkretnych w drugim dziesiątku rozszerza się, wchodzą nowe miary, np. metr, decymetr, rok i miesiące, tuzin, godziny na zegarze i t. p. Wogóle wprowadzanie miar używanych powinno się odbywać stopniowo, w miarę wzrastania zakresu liczbowego, a nie z urzędu jednorazowo przez wykuwanie.

Na tem kończę uwagi swe o pierwszym roku nauczania. Genetyczne rozwijanie pewnych pojęć metodycznych, jakie stosować usiłuję w tej książeczce, pozwoli mi może niejedną rzecz w dalszych wywodach wyjaśnić, jestem bowiem zdania, że aby jaśniej sobie zdawać sprawę z początków, trzeba trochę obszerniej poznać przedmiot, mieć skalę porównawczą i punkty wytyczne.

ROZDZIAŁ IV.

W rozdziale niniejszym omówimy nieco bliżej liczby z zakresu od 1—20, aby w ten sposób dać przykład, jak prowadzić należy nauczanie w tym zakresie. Znajdzie tu czytelnik tylko krótki szkic wykładu; uczący powinien sam uzupełnić ten wykład, co przyjdzie bez trudności, jak również zastosować ogólny bieg do innych liczb we wspomnianym zakresie.

Weźmy na początek np. liczbę 4.

Stopień pierwszy. I. Uzmysłowienie liczby.

a) Na przedmiotach otaczających lub dobrze znanych z doświadczenia. Np. ile stół ma nóg? Liczymy: 3 i jeszcze jedna. Razem mówimy 4. Tak samo np.: ile pokój ma ścian? ile kątów? ile książka rogów? ile razy uderzę w stół? i t. d. Nauczyciel może jeszcze przygotować szereg przedmiotów, w których występuje liczba 4, np. skrzypce mają 4 struny, 4 kołki, tabliczka szyfrowa jest otoczona 4 deseczkami i t. p. Dalej nauczyciel rysuje na tablicy różne przedmioty, w których wyraźnie zaznaczyć można liczbę 4, np. czworokąt, koń, schodki i t. d. Następnie odwołujemy się do wyobraźni dzieci opartej na ich doświadczeniu. Np. Ile krowa ma nóg? Ile wóz ma kół? Ile motyl ma skrzydeł? i t. d. Dalej wchodzimy w dziedzinę bardziej abstrakcyjną: Ile rok ma pór? Ile miesiąc tygodni? i t. d.

b) Na przyrządzie i palcach. Ile widzicie krążków na przyrządzie? Dokładam (dodaję) jeszcze jeden (czerwony).

Ile razem? Wezmę stąd jeden, ile zostało? A stamtąd, ile zostało? Uczniowie robią podobneż operacye sami na przyrządzie i jeżeli są odpowiednie tabliczki, układają na nich krążki tekturowe.

Schowajcie palec duży u ręki lewej. Nauczyciel pokazuje sam manipulacyę (odwracając dłoń ku sobie). Ile palców zostało? Schowajcie wskazujący. Ile zostało? Uczniowie dalej wykonywają te rzeczy sami na zapytanie nauczyciela.

c) Rysowanie kółek i kresek. Narysujmy 3 kółka. Nauczyciel sam rysuje na tablicy w takiej postaci, jak na przyrządzie znajdują się krążki. Dorysujmy jeszcze jedno Ileśmy otrzymali? To samo z kreskami w szeregu zwyczajnym.

d) Rozpatrywanie obrazków w książeczkach. Obrazka tu nie podaję, ale łatwo zrozumieć, że treść jego jest tak ułożona, aby zawierała przedmioty w liczbie większej lub mniejszej niż 4. Przedmioty są połączone w całość żywą, illustrującą jakiś moment z życia człowieka lub przyrody. Mogą być również oddzielne przedmioty (małe obrazki) w odpowiedniej liczbie.

II. Przykłady konkretne i zadania. Rozróżniamy te dwie rzeczy. Jeżeli pokazuję przedmioty i zapomocą rąk lub przyrządu jednocześnie mogę uzmysłowić samo działanie—jest to przykład konkretny. Jeżeli zaś daję pytanie, w które wchodzą oddzielne przedmioty dzieciom znane w pewnej liczbie, i trzeba wykonać działanie tylko w myśli, mamy zadanie konkretne.

Podając jaki przykład konkretny, nauczyciel osobliwie na tym stopniu wyzyskuje go możliwie na całą drabinkę działań z daną liczbą, ale przy każdem nowem działaniu stale odwołuje się do przyrządu, każe rysować kółka, kreski i t. p. Prócz tego daje odpowiednie zadania, w które wchodzą przedmioty, nie znajdujące się w klasie. Mam tu w jednej ręce 3 ołowki, a w drugiej 1. Ile mam razem? Nauczyciel trzyma ręce podniesione przed klasą. Następnie zmienia miejsce grup ołówków w rękach (uzmysłowienie przemienności) i znowu to samo pytanie. Tak samo na przyrządzie.

Mam teraz 4 ołówki w jednej ręce, jeden zabieram (odejmę). Ile zostało? To samo na krążkach. Nauczyciel nie tylko sam wykonywa podobne operacye, ale każe to zrobić uczniom.

Wicio miał 3 kop., a od babci dostał jeszcze jedną. Ile ma teraz? Połóż na przyrządzie 3 krążki, a ty (zwraca się do drugiego ucznia) dołóż tyle, by było 4. To samo naodwrót (dopełnianie).

Wicio za kopiejkę kupił ze swych pieniędzy śliwki. Ile mu pieniędzy zostało? Kazio ma 3 kop., a ołówek kosztuje 4 kop. Ile mu brakuje? (dopełnianie).

W dwóch pudełkach mam 4 guziki, w jednem jest jeden guzik. Ile w drugim? (rozkładanie). Nauczyciel może do pomocy używać rąk lub dwóch stron opisanego powyżej przyrządu.

W taki sam sposób przerabiamy inne działania.

Np. mam tu 2 ołówki w jednej ręce i 2 w drugiej. Ile razem? Jeżeli uczniowie w tym przypadku, zarówno jak we wszystkich innych, nie oryentują się dobrze, popieramy sprawę liczeniem. Połóż 2 krążki, a potem jeszcze 2. Ile razem? Jeszcze przykłady i zadania.

Mam w jednej ręce 4 ołówki, widzicie. Biorę (odejmuję) dwa. Ile zostało? To samo z krążkami i innymi przykładami. Prócz tego zadania. Dwie pary guzików, ołówków i t. d. ile razem? Jeden gospodarz ma dwóch synów, drugi dwie córki. Ile mają dzieci razem? (czworo). Tu również przykłady na dopełnianie i rozkładanie, z uzmysłowieniem i nie.

Przy tych wszystkich działaniach każdemu dodawaniu towarzyszy zaraz odejmowanie. Dopełnianie i rozkładanie uzmysławiamy również, używając do tego rąk lub dwóch stron przyrządu, albo nawet pudełek (piórników) lub innych sposobów. Później można pozbyć się tego, jak np. w zadaniu: na dwóch krzakach siedzą 4 wróble; na jednym 2; ile na drugim?

Po takiej operacyi, która może się ciągnąć przez kilka lekcyi, co zależy od różnych powodów, nauczyciel przechodzi do 5 i przerabia z nią to samo. Na tem się kończy pierw-

szy stopień rozważania pierwszych pięciu liczb. Na tym stopniu kładziemy najgłębsze warstwy fundamentów, tu nie można się śpieszyć, trzeba z całą dokładnością i drobiazgowością, urozmaicając rzecz zadaniami i przykładami, gruntownie opracować ten dział. Muszę dodać, że rachunek na palcach również może być stosowany tutaj z wielką korzyścią, jak przy uzmysłowieniu. Daje się w ten sposób uczniowi do ręki mechanizm sprawdzający, zawsze gotowy.

Przechodząc do drugiego stopnia, powtarzamy kolejno od liczby do liczby poprzednie i uzupełniamy przejściem do t. zw. liczby oderwanej, pisania cyfr i przykładów liczbowych. Rzecz naturalna, że to powtarzanie kolejne dużo czasu nie zajmuje, jest tylko przygotowaniem uwagi, a także probierzem pewności, o ile pierwszy stopień był należycie przerobiony. Gdyby zaszły braki, wina to uczącego i trzeba znowu z każdą liczbą przerabiać poprzednie. Przyznać muszę, że w pewnych przypadkach sprzyjających i w nauczaniu indywidualnem nie widzę nawet przeszkód, aby cały pierwszy dziesiątek był dwustopniowo przerabiany.

Stopień II.

Przy liczbie 4 powtórzymy w krótkości na jednym lub kilku przykładach pierwszy uzmysławiający moment, zaczynamy od pierwszego działania: $3 + 1 = 4$. Podajemy najpierw przykłady konkretne, jak powyżej, zadania, a potem czytamy: 3 i 1 ile to będzie? Jak napisać 4? Nauczyciel rysuje z kresek figurę: , radzi to zrobić uczniom, a potem powiada, że wygodniej jest odrazu linią ciągłą cztery pisać. Wobec tego możemy zapisać wspomniane działanie: $3 + 1 = 4$. Uczniowie wiedzą już z poprzedniego, co znaczą znaki: $+$, $-$ i $=$, jak również umieją pisać cyfry: 1, 2, 3. Tak samo zapisujemy $1 + 3 = 4$ i następnie przechodzimy do odejmowania. Następnie dopełnianie i rozkładanie. Ile trzeba dodać do 3, żeby otrzymać 4? Nauczyciel zapisuje z pytaniem: $3 + ? = 4$. Ile trzeba odjąć od 4, aby otrzymać 3. Nauczyciel zapisuje z pytaniem: $4 - ? = 3$. Do tego dodajemy jeszcze

2 odpowiednie pytania. Wszystkim tym działaniom stale towarzyszą zadania.

W ten sposób przerabiamy wszystkie inne przykłady działań w zakresie 4, włączając: 4 — 4 = 0. Zdaje mi się, że ten krótki szkic wystarcza, aby zrozumieć, jak się powinno postępować. Nadmienić tu jednakże muszę, że przy monografii każdej z liczb potrzebny jest zbiorek zadań i przykładów z góry, uprzednio przygotowanych.

Przy takiem dwustopniowem traktowaniu można na stopniu drugim 1 i 2 przechodzić jednocześnie. Nauczyciel przy każdej z liczb zawsze powtarza poprzednie, na każdej lekcyi poświęca kilka minut specyalnie na zapytania w rodzaju: 1 + 2 ile będzie? 4 — 3 ile będzie? i t. d. Robić to trzeba przedewszystkiem dla zmechanizowania rachunku.

Zajmiemy się teraz liczbami z drugiej części pierwszego dziesiątka.

Różnica, jaka tu występuje w traktowaniu tych liczb, polega na tem, że każdą z nich przechodzimy odrazu, bez dwu stopni. To najgłówniejsza różnica. Poza tem w uzmysłowieniu rysowanie kółek i kresek, jakkolwiek zatrzymane być musi, nie oddzielone jest tak długim odstępem od pisania cyfr, a wiąże się z niem bezpośrednio. Chodzi głównie o zajęcie rąk dzieci i o poznanie płynące z czuć ruchowych i mięśniowych. Oczywiście przedłuża się też czas potrzebny na przejście jednej liczby, im większa bowiem liczba, tem więcej nasuwa się różnych z nią kombinacyi działań, zadań, powtórzenia i t. p.

Zwrócenie uwagi na te różnice wystarcza do tego, aby zgodnie z poprzedniem prowadzić nauczanie każdej liczby pierwszego dziesiątka. Wobec tego tutaj jeszcze zajmiemy się kilkoma kwestyami, które dotyczą tego nauczania.

Czy z każdą liczbą należy obchodzić się jednakowo? Pytanie nie dotyczy przykładów konkretnych, miar, z któremi przy każdej liczbie należy zapoznawać, o ile to jest możliwe. Np. mówiąc o trójce, można pokazać sążeń i zaznaczyć, że zawiera 3 łokcie; mówiąc o 7-ce, wspomnieć o dniach w tygodniu i t. d. W przykładzie powyższym zaznaczyliśmy

tę rzecz. Lecz być może, iż liczba zawiera wewnętrznie, że tak powiem, pewne cechy godne zaznaczenia, albo też ma wartość metodyczną przy traktowaniu dalszych działań rachunku. Otóż taka sprawa zachodzi. W pierwszym dziesiątku poznajemy liczby głównie tylko z punktu widzenia dodawania i odejmowania, bo ostatecznie dopełnianie i rozkładanie do nich się sprowadza. Ważne jest również, czy dana liczba zawiera całkowitą liczbę składników większych niż jedność. Do takich liczb w pierwszym dziesiątku należą: 4, 6, 8, 9 i 10. Otóż potrzebne jest zwrócenie uwagi na tę ich podzielność w formie pytań: ile trójek zawiera sześć? ile dwójek zawiera 8? i t. d. W ten sposób dzieci powoli przyzwyczajają się do rachunku g r u p a m i, co ważną rolę odgrywa w dziesiątku drugim i wogóle w rachunku, a zarazem podkreśla się fakt dużej wartości dla przyszłej nauki. Jednocześnie zapisywanie może być skrócone, co trafia do przekonania dzieciom, jeżeli sam fakt na przykładach konkretnych poznały. Np. zamiast $2+2+2=6$ możemy zapisac $3 \times 2 = 6$, gdzie znak $\times$ mnożenia zastępuje wyrażenie „razy" (trzy razy dwa). Nietrudno też zaznaczyć tu fakt, że $2 \times 3 = 6$ *). Ciekawe jest, że nie we wszystkich krajach przyjęto zapisywać liczbę mnożoną na początku, jak to się robi u nas. Mojem zdaniem, przy nauczaniu początkowem lepiej jest zapisywać, jak powyżej. Nie występuje tu jeszcze mnożenie właściwe, nie mówimy: pomnóż 3 przez 2, ale zaznacza się pierwszy podstawowy fakt, z którego mnożenie wyrasta Przyuczanie do chwytania liczb grupami jest potrzebne jeszcze do tego, że dalej mamy utworzyć tak ważną grupę, jaką jest dziesiątek, wobec czego dobrze jest rzecz przygotować. Wspomniane jednakże pojęcia należy podkreślić już w drugiej połowie pierwszego dziesiątka, gdy się zbierze więcej przykładów odpowiednich, np. 8.

Używanie świadome słowa „raz", „razy" można przygotować przez szereg pytań. Np. ile razy jesz obiad dzien-

*) Bliższe szczegóły dotyczące uzmysłowienia znajdzie czytelnik w rozdziale następnym

nie? Ile razy przychodzisz do szkoły? Ile razy bije zegar, gdy jest godzina druga? i t. p. Jak powiedzieliśmy wyżej, niema tu właściwie mnożenia, raczej są początki rozkładania na czynniki, ale rzeczy tej pominąć nie można, chyba że, jak to robią niektórzy metodycy, w drugim roku poświęcimy sporo czasu na powtórzenie kursu 1-go i mnożenie oraz mieszczenie (mierzenie) i dzielenie w zakresie od 1 — 20. Takie dwustopniowe przechodzenie tych ważnych rzeczy nie budzi wątpliwości w nauczycielu, ani zniechęcenia w dzieciach; u nas może narazie spotkałoby się z pewnymi zarzutami wobec wiary w zdolności naszych dzieci, wiary, w której, mówmy otwarcie, jest sporo nierozumienia zasad dydaktyki.

W końcu pierwszego dziesiątka, przy wprowadzaniu skomplikowanych przykładów, np. 7 — 2 — 3 = 2, należy wytłomaczyć, co znaczy taki sposób zapisywania. Zdarzało mi się spotykać uczniów mozolących się nad podobnymi przykładami, którzy zupełnie nie zdawali sobie sprawy, co znaczy taki przykład. Tutaj również na miejscu będzie wytłomaczenie poglądowe, że zamiast odejmować od 7 najpierw 2, a potem od reszty 3, można odrazu odjąć pięć. Poglądowe wytłomaczenie odbywa się na tle przykładów konkretnych i zadań. Np. mama dała Stasiowi najpierw 2 gruszki, a potem 3; wszystkich gruszek miała 7. Ile zostało? To samo oczywiście można wykazać na przyrządzie i na przedmiotach innych.

Zajmiemy się teraz drugim dziesiątkiem. Wspominaliśmy już w poprzednim rozdziale o niektórych ważnych szczegółach nauczania w tym zakresie. Jedną z głównych rzeczy tutaj jest wyseparowanie pierwszego dziesiątka w oddzielną grupę. Takie wyseparowanie musi być również *unaocznione*. Do tego służyć mogą przedmioty różne, przyrząd i rysunek, t. j. te same, co powyżej, środki pomocnicze, poglądowe.

Nauczyciel przynosi do klasy zbiór patyczków dość dużych, aby klasa cała mogła rzecz dobrze widzieć. Odlicza dziesięć patyczków, wywołuje ucznia, aby sprawdził, trzymając patyczki przed sobą i przed klasą. Dziesięć patyczków, inaczej dziesiątek patyczków, związuje sznureczkiem. Teraz

do tej grupy (trzymając wszystko przed klasą) dołącza jeden (trochę oddzielony od związanych). Mamy tu jeden i dziesięć, inaczej jedenaście patyczków. Ile trzeba dodać do dziesięciu, żeby otrzymać jedenaście? Ile trzeba odjąć od jedenastu, żeby otrzymać dziesięć? To samo zaraz przerabiamy na przyrządzie. Połóż dziesięć krążków, dołącz jeden (czerwony). Ile razem? Dalej te same pytania. (Należy też nie zapominać, jak i poprzednio przy mniejszych liczbach, o pytaniach w rodzaju: co jest większe, czy jedenaście orzechów, czy też dziesięć? o ile większe? i t. d.). Potem następują inne przykłady konkretne, aby rzecz się należycie utrwaliła. Na pierwszych liczbach drugiego dziesiątka należy dłużej się zatrzymać, aby proces powstawania dobrze się wyklarował. Dalej w ten sposób można przejść cały drugi dziesiątek, przyczem prócz pisania cyfr dobrze jest używać zakładania krążków tekturowych. Pisanie kresek i kółek też trzeb stosować, jakkolwiek nie jest to operacya krótka. Ta zmudność rękoczynu daje dobre pojęcie o wartości cyfr, a po drugie, wraża w wyobraźnię budowę liczby. Przejście podobne całego pierwszego dziesiątka sprawi, że dzieci będą umiały liczyć od 1 do 20. Nie należy swoją drogą zbytniej na to zwracać uwagi, gdyż przez częste powtarzanie, działania i t. p. liczenie prawidłowe stanie się własnością pamięci. Takie szybkie przebieżenie drugiego dziesiątka może tu być dozwolone, gdyż właściwie proces sam staje się więcej formalnym, bo wyobraźnia odmawia już posłuszeństwa, a jeżeli liczby pierwszego dziesiątka są dobrze znane i sam sposób tworzenia liczb drugiego jasno zrozumiany, trudności innych niema.

Nauczyciel nie omieszka również zadawać pytania w rodzaju: Jak się otrzymuje trzynaście? Jest to 10 i 3. Przytem, rzecz jasna, na kilku przykładach odpowiedź tę powinien sam podsunąć. Otrzymując bystre i jasne odpowiedzi przy łączeniu liczby z różnymi przedmiotami i bez tego, wnioskować może nauczyciel o jasności przyswojenia. To pierwszy cykl operacyi w drugim dziesiątku.

Drugi cykl polega na rozszerzeniu komplikacyi działań,

o której mówiliśmy w końcu pierwszego dziesiątka. To rozszerzenie polega na tem, że jednym z elementów liczbowych jest stale dziesiątek, suma dwóch innych nie przekracza nigdy dziesiątka, a różnica większa jest od 0. Ile będzie 11 a 2? Jedenaście jest to 10 a 1. Do tego trzeba dodać jeszcze dwa. Dwa a jeden jest 3, dziesięć a 3 jest 13. Rzecz tu doskonale jest widoczną na przyrządzie (pierwszym lub drugim z podanych), jeżeli dziesiątek zawsze przedstawiamy krążkami lub kulkami jednej barwy, a dodatki drugiej. Cała rzecz polega znowu na umiejętnem przejściu do działań właściwie w pierwszym dziesiątku zawartych. Wyjaśnienie tego stanowi tu najistotniejszą trudność i na największą uwagę zasługuje. Da się to zrobić tylko poglądowo. Czytelnik widzi, z jaką jaskrawością występuje tu twierdzenie o dodawaniu sumy. Jako jeden z dobrych środków może tu służyć sposób polegający na tem, że dzieci rysują kółka u siebie na tabliczce i przytem tak, że cały dziesiątek jest narysowany z początku w jednym wierszu, a w drugim liczby dodatkowe. W ten sposób widoczne jest, jak na przyrządzie, że działanie odbywa się tylko w drugim wierszu. Po kilku takich pokazach nauczyciel zwraca uwagę na ten szczegół i pokazuje skrócony sposób działania. Do szeregu pytań tutaj nasuwających się należą, prócz odnoszących się do odejmowania, jeszcze, jak zwykle, pytania na rozkładanie i dopełnianie. Ile trzeba dodać do 14, aby otrzymać 16? Duże liczby stanowią razem 15, jedna z nich jest 13; czemu się równa druga? Rozumie się, pytania te podawać należy najpierw w formie konkretnej. Np. W dwóch łódkach, dużej i małej, płynie 15 osób, w jednej z nich usiadło 13, ile usiadło w drugiej? Przy tem wszystkiem wprowadzamy cyfry, przechodząc kolejno i stopniowo wszystkie liczby drugiego dziesiątka. Nie należy jednakże, jak i wszędzie, pedantycznie się trzymać szeregów wzrastających lub malejących, np. 12 + 1, 12 + 2, 12 + 3, bo dla dzieci nie może stąd płynąć nauka, gdy z łatwością i mechanicznie z liczenia odgadują odpowiedź. Lepiej na wyrywki zadawać pytania i układać szeregi, co nie przeszkadza, żeby np. wspomnia-

ny szereg należał również do używanych. Czytelnik z łatwością zauważy, ile tu różnych kombinacyi działań w tym cyklu, ile czasu na to potrzeba, aby dzieci w tej materyi swobodnie poruszać się mogły.

Trzeci cykl dotyczy tworzenia liczb drugiego dziesiątka z liczb pierwszego. Najtrudniejsza to bodaj rzecz w całym tym kursie. W poprzednich cyklach dziesiątek był niejako dany, tu go trzeba już wytworzyć. Mówiliśmy już w rozdz. III-im o głównym sposobie działań, jaki tu stosować należy, nie będziemy więc dalej się nad tem rozwodzić, opiszemy tylko jeden z ważniejszych momentów uzmysłowienia. Mamy dodać 7 i 8. Kładę na przyrządzie 7 krążków, a potem po kolei 8 krążków innej barwy. Otrzymuję odrazu w ten sposób liczbę potrzebną, przyczem na pierwszym przyrządzie musiałem przejść poza listewkę przybitą w środku, a w drugim przesunąć się po uzupełnieniu dziesiątka na drugi drut. Ponieważ odrazu widoczne jest, że dziesiątek składa się z 7 krążków (kulek) jednego koloru i trzech drugiego, zaznaczam, że mogę to działanie wykonać, dodając najpierw do 7 liczbę 3, wziętą z 8. Otrzymam w ten sposób dziesiątek, a potem do niego dodaję pozostałe 5. Trzeba więc najprzód zrobić dopełnienie do 10, potem rozkładanie 8 i nakoniec dodawanie do 10. Otrzymam 15 (krążki w liczbie trzech, należące do pierwszego dziesiątka, mogę teraz odwrócić, by posiadały tę samą barwę, co reszta krążków należących do tegoż dziesiątka). Jak widzimy, natura samych przyrządów prowadzi do odkrycia tego sposobu. Tę samą operacyę wykonywają dzieci przy tablicy, a piśmiennie można ją przedstawić tak:

$$7 + 8 = 7 + 3 + 5 = 10 + 5 = 15,$$

przyczem dobrze jest również zapisywać ogniwa pośrednie:

$$10 = 3 + 7; \ 8 = 3 + 5.$$

Naturalnie, poprzednie równości $7 + 3 = 10$ i $8 = 3 + 5$ muszą być znane. Gdy uczniowie wprawią się w ten rachunek, co nieprędko przychodzi, można ogniwa pośrednie oczywi-

ście wykluczać. Nie wstydzę się tu jeszcze powtórzyć, że nigdy nie bywa za dużo wprawiania w te operacye.

Przy każdym cyklu dajemy szereg przykładów konkretnych i zadań z uwzględnieniem rozszerzającego się zakresu miar.

Na tem kończę uwagi o pierwszym roku nauczania. Dokładniejsze przedstawienie procesu tego wymagałoby samo napisania takiej książeczki, jak niniejsza, zdaję sobie bowiem dobrze sprawę, że to, co powyżej było powiedziane, zawiera tylko uwagi. Zakres wiedzy rachunkowej, objętej powyższym kursem, w każdym razie nie jest za mały, raczej za duży, wszystko bowiem zależy od warunków, w jakich uczymy. Z dziećmi inteligentniejszemi, w nauczaniu indywidualnem przejdziemy więcej, w szkole wiejskiej lub przytulonej gdzieś na przedmieściu przejść możemy znacznie mniej. To też nauczyciel niech liczy się z tymi warunkami i zdaje sobie sprawę, że w nauce rachunku, jak nigdzie, właśnie jakość zdobytej wiedzy, a nie ilość, ma największe znaczenie. Jeżeli potrafi w ciągu roku w szkółce wiejskiej przy krótkim czasie nauczania zapoznać dzieci dobrze tylko z liczbami pierwszego dziesiątka, zrobił już niemało, tembardziej że wśród dzieci tych spotykają się różne. Bywają często takie, których rozwój nakazywałby sumieniu pedagoga na Zachodzie odesłać je do szkoły specyalnej, dla dzieci niedorozwiniętych. A u nas takie dzieci często idą pod stół życia...

ROZDZIAŁ V.

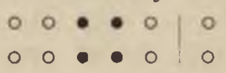
Materyał podany wyżej, jak nadmieniliśmy, jest obfity i może być w różnych okolicznościach mniej lub więcej wyzyskany. To ostatnie zależy od taktu pedagogicznego nauczyciela. Pomimo to nazwaliśmy omówiony zakres programem pierwszego roku nauczania, przystosowując się do niektórych ewentualności i poniekąd praktyki naszego nauczania. Z tego wynika, że to, o czem dalej mówić będziemy, należeć ma do drugiego roku nauczania.

Najpierw należy sobie zdać w krótkości sprawę z pewnej różnicy charakterystycznej, jaka występuje tutaj w porównaniu z pierwszym rokiem. Wspominaliśmy już, że w miarę wzrastania zakresu liczbowego wyobraźnia odmawiać zaczyna posłuszeństwa, t. zw. „wyobrażenie liczby" traci swój grunt i poglądowość modyfikuje się, ścieśnia, ustępuje, a natomiast zjawia się czynnik inny, nader ważny: rozumowanie oparte na dostrzeżonych indukcyjnie własnościach formalnych działań i podobieństwach w tworzeniu liczb. Jak wszystko w nauczaniu, tak i ten czynnik zjawiać się winien stopniowo, powoli, powinien być wprowadzany z ostrożnością wielką. Nic bowiem łatwiejszego tutaj, jak przesadzić i niemal na zawsze zabić zdolności matematyczne dzieci. Mówiliśmy już o t. zw. prawie przemiennościowem przy dodawaniu, o własnościach dodawania i odejmowania sumy. W drugim dziesiątku zrobiony był kapitalny krok naprzód przez wytworzenie pojęcia dziesiątka i sposobu powstawania

liczb na zasadzie systemu dziesiątkowego i pozycyjnego. Pewien myślący metodyk nazywa wynalezienie systemu pozycyjnego jednym z największych wynalazków ludzkich. Czyż nie jest to słuszne? Tymczasem nieraz obchodzimy się z tem w nauczaniu pobieżnie, śpiesząc się niewiadomo po co, jakbyśmy mieli do czynienia z tem, czego się na pamięć nauczyć można. Prócz wspomnianych własności działań podkreślamy jeszcze prawo łącznościowe przy dodawaniu, polegające na tem, że składniki można łączyć w różne grupy po dwa lub kilka i przez to suma się nie zmienia. Tak samo prawa rozdzielnościowe i przemiennościowe przy mnożeniu, z których wynika np., że $(5+2)\ 3 = 3 . 5 + 3 . 2$ i $3 . 5 = 5 . 3$. Są to te kapitalne kwestye formalne, które wyjaśnić winno indukcyjne rozumowanie przez przykłady konkretne i zadania. Na nich oprzemy ważne wnioski metodyczne. Im przestronniejszym się staje zakres liczbowy, tem częściej występować zaczynają szeregi wytwarzane przez uczni. Np. $21 + 2 = 23$, $31 + 2 = 33$ i t. d. Znaczenie tych szeregów jest podwójne: wskazują podobieństwa tworzenia liczb niezależnie od wielkości tychże, a po drugie, zbędnem czynią ściślejsze monograficzne traktowanie. Poprzednio też mieliśmy szeregi np. $7 + 1 = 8$, $6 + 2 = 8$ i t. d., ale te szeregi różnią się od wspomnianych, gdyż każdy wyraz musi być oddzielnie poznany, uzmysłowiony, gdy tymczasem w poprzednim szeregu odgrywają rolę czynniki formalne, uczniowie sami go wytwarzają. Dojrzałość myśli polega również na tem, że przejawia się w niej świadome, celowe operowanie pojęciami. W takich szeregach mamy jeden z ciekawych przykładów tego.

Jedną z głównych kwestyi, jaką poruszamy w roku drugim, są nowe działania: mnożenie, mierzenie i dzielenie. Jak już było powyżej zaznaczone, odróżniamy mierzenie i dzielenie ze względu na ich treść konkretną, nie zaś na proces formalny, który wyraża się w jednem i tem samem działaniu. Jak mnożenie wynika z dodawania, tak samo mierzenie i dzielenie — z odejmowania. Nie należy o tem pamiętać tylko na początku, ale i w dalszych stadyach nauki w drugim

roku. Z mnożeniem związana jest t. zw. tabliczka mnożenia, z której wynika tabliczka dzielenia. Zaznajomienie z temi tabliczkami jest rzeczą nader ważną i nie może się opierać o na „wykuwaniu“. Takie wykuwanie niczego nie uczy i nawet jest zwodnicze, bo pamięć w wieku młodym jest świeża, ale i nader nietrwała w takich rzeczach.

Zaczniemy teraz od wprowadzenia pojęcia mnożenia. Rzecz jasna, że nauczyciel, zanim przejdzie do dalszych stopni nauki, powinien powtórzyć poprzednie. Jeżeli rzecz się dzieje po wakacyach, kiedy zmienna i silna fala nowych, żywych i interesujących wyobrażeń przemknęła przez duszę dzieci, takie powtórzenie jest konieczne, jak to wie każdy doświadczony nauczyciel. Otóż powtarzamy dodawanie, odejmowanie, dopełnianie i rozkładanie w pierwszych dwóch dziesiątkach, powtarzamy dotąd, urozmaicając rzecz zadaniami, póki się nie przekonamy, że średni uczeń włada tem należycie. Wtedy zaczynamy rzeczy nowe. Nie skończyliśmy jeszcze z liczbami 2-go dziesiątka, nie rozkładaliśmy ich na czynniki. To właśnie stanowi przedmiot dalszych zajęć. Nauczyciel przypomina to, co mogło być zrobione w tej materyi w dziesiątku pierwszym, i idzie dalej. Zrozumiałem jest, że wprowadzając nowe pojęcie, należy wytworzyć takie warunki, aby to pojęcie w najjaśniejszej wystąpiło formie, i dlatego bardzo ważne jest zagadnienie o środkach uzmysławiających mnożenie. Mogą to być przedmioty różne, ale związane są z tem trudności wielkie: bardzo trudno bez zmudnego liczenia oceniać otrzymany rezultat. Stąd, jakkolwiek środka tego nie odrzucamy (może kto obmyśli dobry sposób i zaradzi brakowi), główny nacisk kładziemy na przyrządy. Tu, jak nigdzie, wyraźnie zaznacza się potrzeba znanej podwójnej barwy krążków i kulek. Np. chcemy uzmysłowić, że $3 \times 4 = 12$. Układamy na przyrządzie krążki w następujący sposób: . Kreska pionowa oznacza przegródkę na przyrządzie. Dzieci rzecz widzą odrazu. Tak samo można zrobić na liczydle, pokręcając pewne kulki, aby

odwróciły się inną barwą:
o o o o ● ● ● ● o o
o o
. Liczydło ma nawet pewną przewagę nad poprzednim przyrządem, gdyż 1-o dziesiątek (a później dziesiątki) występuje oddzielnie i 2-o grupy kulek są zawsze jednostajnie uszeregowane. Weźmy np. przypadek taki: 3 × 5 = 15. Na przyrządzie pierwszym figura wtedy wypadnie taka:
o o o ● ● | o o o
o o ● ● ● | o o

Tutaj widocznem jest, że druga piątka jest odwrócona (symetrycznie względem punktu), a stąd nie tak łatwo ją okiem chwytać, jakkolwiek przewidujący nauczyciel może rzecz tę usunąć, przyzwyczajając dzieci do chwytania figur podobnież odwróconych.

Dalej dajemy przykłady i zadania, gdzie wchodzi mnożenie 4 przez 3, następnie przykłady liczbowe. Należy tu zaprowadzić pewne stopniowanie. Z samego sposobu uzmysłowienia widocznem jest, że dla dzieci łatwiej jest chwytać rzecz, gdy mnożna jest większa, więc np. rozkładamy 14 na dwie grupy po 7, 16 — po 8, 18 — po 9, dalej 15 na trzy grupy po 5 i t. d. Prawo przemiennościowe przy mnożeniu również uzmysławiamy w ten sam sposób, np. 4 × 3, gdzie występują 4 trójki różnobarwne. Można też używać sposobu prostokąta, np.
o ● o ●
o ● o ●
o ● o ●
. Stąd widocznem jest, że 4 × 3 = = 3 × 4. Ten sposób może jednakże być uważany za pomocniczy, gdyż z samej poprzedniej figury bez liczenia dziecka trudno odgadnąć liczbę kulek. Dla przypadku mnożenia przez dwa można używać pierwszego przyrządu, co ułatwia chwytanie, dość trudne w jednym szeregu.

Wyjaśnienie pojęcia mnożenia pociąga za sobą zaraz mierzenie (mieszczenie). Przy tej sposobności należy przypomnieć znane dzieciom miary i faktycznie wykonać kilka przynajmniej rzeczywistych pomiarów. Używać można do tego łokcia, metra, decymetra i arszyna. Pomiary te mogą być wykonane w klasie lub gdziekolwiek w innem miejscu, ale nauczyciel musi się do tego przygotować, aby rezultat nie zrobił kłopotu

(mogą się zostawać reszty). Przyjęto mówić, że dana liczba tyle a tyle razy mieści się w drugiej, dana długość mieści się w drugiej długości. Nie będę się spierał o słowa, ale w niektórych przykładach konkretnych takie wyrażenie czasem jest nietrafne. Np. Ile razy mieści się pięć domów w 15 domach? Inne wyrażenia, jak: „zawiera się“, „wchodzi“ i t. p., posiadają te same wady, które jeszcze wyraźniej występują przy ułamkach. Pomimo to nowego wyrażenia stworzyć nie usiłuję. Po uzmysłowieniu mieszczenia, jak poprzednio, na krążkach, przykładach i t. p. należy umieć zapisywać działanie. W „mieszczeniu" rezultat działania zawsze jest liczbą wskazującą „liczbę razy". Możemy przy przykładach i zadaniach zapisywać z mianami, naprz. 15 guz. : 3 guz. = 5, a przy przykładach liczbowych tak samo bez mian. Niektórzy radzą przy dzieleniu prowadzić zapisywanie w ten sposób: $\frac{1}{5}$. 15 guz. = 3 guz. czyli piąta część piętnastu guzików jest 3 guziki. Podobny sposób zapisywania, nadający się w dzieleniu, ma swoje zalety, gdyż odrazu przyzwyczaja do szukania części z całości. Zdaje mi się jednakże, że sposobu zapisywania zmieniać niema potrzeby, a przy dzieleniu, do którego niebawem przejdziemy, może on być używany równorzędnie, gdyż narazie odróżnia nawet dzielenie od mierzenia. Na początku dobrze jest również zapisywać dwie równości: 5 $\times$ 3 g. = 15 g., a potem 15 g. : 3 g. = 5. W pierwszej równości zapisaliśmy nie tak, jak to u nas zwyczajnie przyjęto, co nie przeszkadza, żeby później przejść do tego ostatniego sposobu. Stawianie mian szczególnie dla dzieci, które niewprawnie piszą, sprawia niemałą stratę czasu i kłopot, ale wyzbyć się tego, przynajmniej w tym początkowym okresie, trudno.

Tak samo jak mierzenie, właściwe pojęcie dzielenia nie jest obce dzieciom z własnego ich doświadczenia. Te też zaczynamy od takich przykładów, które mogą być znane. Np. Ojciec miał trzy orzechy włoskie i rozdał je trojgu dzieciom swoim. Ile dał każdemu dziecku? Podobnyż przykład, gdy

mamy dajmy na to 6 orzechów. Jaką część wszystkiego dostało każde dziecko? To główne pytanie, na które nauczyciel sam narazie odpowiada, a potem zapytuje uczni. Uzmysławiając na liczydle w ten sam sposób, jak poprzednio, pyta się, jaką część te kulki stanowią całej liczby kulek. (Np. przedstawiono 6 podzielone na 3 dwójki. Ile tu tych dwójek? Każda para kulek (każda dwójka) stanowi część 6 kulek. Jaką część?). Takiej samej dyskusyi powinny podlegać pytania: ile razy więcej? ile razy mniej? Opracowując każde z takich pytań, nauczyciel zadaje odpowiednie przykłady i zadania. Np. Wicio ma 4 stalki, a Kazio 2 razy mniej. Ile ma Kazio? Przerabiamy w taki sposób cały zakres od 1—20, póki się nie nabierze pewności, że dzieci rzecz zrozumiały.

Fakt, że zakres od 1—20 jest dzieciom znany z poprzedniej nauki, sprzyja właśnie dobremu ugruntowaniu pojęć mnożenia i dzielenia. Tworzenie szeregów na mnożenie i dzielenie w tym zakresie nie jest jeszcze wygodne, gdyż łatwo go przekroczyć, ale z tego nie wypada, by nauczyciel trzymał się byle jakiego porządku: pozostaje on przy dzieleniu tym samym, jak przy mnożeniu. Niektórzy zaczynają od tworzenia szeregu przez mnożenie przez 1. Nie wydaje mi się to naturalnem. Tak samo, jak dla dodawania i odejmowania charakterystycznem pod pewnym względem jest dodawanie i odejmowanie 0, także dla mnożenia i dzielenia — mnożenie i dzielenie przez 1. Ale jak dodawanie 0 nie mogło stanowić początku pojęcia o dodawaniu, tak samo mnożenie przez 1 nie jest początkiem mnożenia. Z drugiej strony działania wzajemnie wspierać się muszą i nauczanie ich przebiegać równolegle, a tu nie byłoby takiej równoległości. Kładę np. na liczydle 5 kulek i pytam: ile razy wziąłem 5 kulek? Raz—odpowiedź jasna. Ile razy 5 kulek mieści się w 5 kulkach? Raz—również dobrze. Ale jaką część stanowi 5 kulek pięciu kulek? Tutaj pytanie jest wprost dla dzieci niepotrzebne. Bawić się dalej w zapisywanie: $2 \times 1 = 2$, $3 \times 1 = 3$ i t. d. również niema potrzeby. Kiedyśmy już spostrzegli, że pojęcie mnożenia jest ugruntowane w tym zakresie, możemy na te rzeczy zwrócić uwagę; będzie to jakby uogólnieniem te-

go pojęcia, ale wyjście z takich przykładów nie wydaje mi się racyonalnem.

Z wyjaśnieniem pojęć mnożenia i dzielenia łączy się organicznie t. zw. prawo rozdzielnościowe przy tych działaniach. Znaczenie tej rzeczy w wielu dziedzinach arytmetyki jest wielkie, i naprawdę dziwić się tylko należy, dlaczego tak mało uwagi zwracają na nią metodycy. Wszak mnożenie liczby dwucyfrowej przez jednocyfrową już wymaga znajomości tego prawa. Jeżeli nie zdołaliśmy albo nie uważaliśmy za potrzebne wcześniej wyjaśnić tej własności mnożenia i dzielenia, uczeń nie może „rozumieć“ ani mnożenia, ani dzielenia, a poza tem ileż błędów będzie popełniał później w różnych zagadnieniach rachunku i t. zw. algebry! Czy kwestya jest za trudna na młodociane głowy? Wydaje mi się, że nie: wszak zrozumienie systemu pozycyjnego i innych rzeczy jest o wiele trudniejsze; tymczasem przechodzimy je, uważamy za potrzebne. Dlaczegóż zasadnicza własność mnożenia ma podlegać takiemu ostracyzmowi? Nie rozumiem.

Prawo rozdzielnościowe wprowadzamy do świadomości uczni również jeszcze w zakresie od 1—20. Uzmysłowienie jest tu łatwiejsze, zakres bliżej znany, a więc łatwiej „wejdzie do głowy“ rzecz nowa. Wyjaśnienie prawa rozdzielnościowego nie jest bynajmniej trudniejsze, niż wyklarowanie dodawania liczb większych niż 5 w pierwszym dziesiątku. Do uzmysłowienia mogą służyć 1-o przykłady konkretne i zadania, 2-o—liczydło.

Nauczyciel bierze dwa piórniki i przed oczami dzieci wkłada do jednego np. 3 stalki, a do drugiego 2. Pyta się, ile włożył do obu? Następnie wkłada znowu do pierwszego 3, a do drugiego 2. Znowu włożyłem ile? Razem ile włożyłem? A teraz powiedz mi, ile razy włożyłem po 5 do obu piórników? Dalej, ile razy włożyłem po 3 do pierwszego piórnika? Ileż tam będzie? Ile razy włożyłem po 2 do drugiego piórnika? Ileż tam będzie? Ile razem będzie? Odpowiedź ta sama. Zadanie można zrobić 2 sposobami, jakimi? Zapiszmy pierwszy sposób: 3 s. $+ 2$ s. $= 5$ s.; 2×5 s. $=$ $= 10$ s. Zapiszmy drugi sposób: 2×3 s. $= 6$ s.; 2×2 st. $=$

$= 4$ st.; 6 st. $+ 4$ st. $= 10$ st. Stąd widzimy, że można napisać: 2×5 s. $= 6$ s. $+ 4$ s. $= 2 \times 3$ s. $+ 2 \times 2$ s.

Oczywiście można podać jeszcze jeden albo kilka podobnych przykładów. Następnie uzmysławiamy rzecz na liczydle, używając do tego kilku drutów. Np. mamy pomnożyć, jak powyżej, 2×5. Na pierwszym drucie układamy kulki tak: o o o o o ● ● ● ● ●. Na drugim notujemy za pomocą kulek: o o o ● ●, t. j. $5 = 3 + 2$. Na trzecim przez odpowiednią manipulacyę z kulkami wytwarzamy taką figurę: o o o ● ● ● o o ● ●. Nie trzeba chyba mówić, że nauczyciel omawia całą operacyę i daje zapytania.

Przy tem wszystkiem pomódz może dużo również zadanie. Np. Ciocia miała trzech siostrzeńców i dwie siostrzenice. Każdemu dziecku dała po dwie śliwki. Ile rozdała śliwek?

Po takich wyjaśnieniach, które przedłużamy dotąd, póki nie będziemy mieli pewności, że dzieci zrozumiały omawianą sprawę, zdobyć możemy czynnik nader ważny, jak to zobaczymy zaraz. Weźmy jako przykład podwajanie liczb pierwszego dziesiątka. Mamy dane do pomnożenia 2×8. Notujemy natychmiast $8 = 5 + 3$. Stąd $2 \times 8 = 2 \times 5 + 2 \times 3$. Jeżeli dzieci przez naukę w roku pierwszym i przez powtórzenie w drugim dobrze umieją mnożyć liczby, których iloczyn nie przekracza 10, natychmiast powiedzą: $2 \times 8 = 10 + 6 = 16$. Można wprowadzić stały sposób rozdzielania liczb na piątkę i resztę, przez co znakomicie się ułatwi proces mnożenia. Wogóle należy szczególną uwagę zwrócić na mnożenie 5 i przez 5. Np. 4×5 jest to samo, co 5×4 na zasadzie wyjaśnień prawa przemienności. Stąd $5 \times 4 = 5 \times 2 + 5 \times 2 = 10 + 10 = 20$. Podsunięcie takiego mechanizmu myślowego przy wykonywaniu mnożenia ma wielką wartość dydaktyczną. O tem trzeba pamiętać.

To samo przy mierzeniu i dzieleniu. Np. $18 : 3 = 15 : 3 + 3 : 3 = 5 + 1$. Prawo rozdzielnościowe przy dzieleniu również należy dłużej omawiać, bo ta rzecz zasługuje na szczególną uwagę. Jeżeli mnożenie jest dobrze poznane,

proces uzmysławiania może być ten sam i trudności nie wywoła. Na dalszych stadyach nauki, w końcu roku np. drugiego, można prawo rozdzielnościowe rozszerzyć na odejmowanie. Np. $2 \times 9 = 2 \times 10 - 2 \times 1 = 20 - 2 = 18$. Zdaje mi się nawet, że wartoby poświęcić temu przedmiotowi czas jeszcze w początku. Jak wielką rolę przy świadomym rachunku pamięciowym odgrywają takie rzeczy, wie każdy nauczyciel, a jeżeli mamy materyał nowy do myślenia, przykłady i zadania, mamy tem samem możność bez nudy dłużej zatrzymać się na małym zakresie liczb. Tego nikt nie pożałuje... Wielkie prawa myśli matematycznej w ten sposób przejawiają się w początkach, bo są niezbędne w dalszym rozwoju. Kto tego nie chce uznać, niech lepiej nie uczy matematyki.

Prawo rozdzielnościowe dalej podlega pogłębieniu przez to, że rozkładamy liczbę nie tylko na 2 składniki, ale na 3 i więcej.

W ten sposób znowu „z wyższego stanowiska" poznaliśmy zakres liczb od 1—20. Teraz trzeba iść dalej; a ponieważ mamy do rozporządzenia znacznie więcej działań, niż w roku pierwszym, pytanie polega na tem, jak będziemy rozkładali zarówno te działania, jak i liczby zakresu dalszego od 1—100, który ma być przedmiotem drugiego roku nauki. Nie łatwe to pytanie. Istnieje pogląd, broniony przez znanego prof. Reina z Jeny i wybitnego metodyka niemieckiego Hartmanna, że zakres wspomniany należy przejść w 2 lata: w pierwszym roku rozpatrujemy liczby tylko z punktu widzenia dodawania i odejmowania, a w drugim na tle wszystkich działań. Nie znaczy to bynajmniej, abyśmy w pierwszym cyklu zupełnie pominęli łatwiejsze przypadki mnożenia,—byłoby to grzechem dydaktycznym, przeczyłoby zasadzie genetycznego rozwijania pojęć arytmetycznych; taki podział dotyczy głównie tabliczki mnożenia w całej jej rozciągłości, jako przedmiotu ważnego i trudnego w nauczaniu. Powyższy pogląd ma swoje dwie zalety: układ materyału jest konsekwentny i prosty, czas przeznaczony na jego przejście pozwala na znakomite ugruntowanie rzeczy głównych,

bo dłużej zatrzymuje uwagę uczącego się w tak ważnym zakresie; dla nauczyciela podobne „przechodzenie kursu" jest łatwiejsze i pomaga do łatwiejszego przystosowania do przedmiotu środków nauczania. Ma on jednakże i swoje wady: 1-o brak rozmaitości w zadaniach i pytaniach, który wynika z uszczuplenia zakresu działań, 2-o związany z tem brak zadośćuczynienia potrzebom praktycznym, nawet przez dzieci odczuwanym, 3-o konieczność wyjścia poza pierwszą setkę, jeżeli cały zakres możliwych dodawań i odejmowań przerobimy, a w takim razie zbyt daleki dystans oddzielający końcowe przypadki tych działań od początkowych. To są główne zarzuty, ale zdaniem mojem wystarczają one do tego, by przechylić szalę na stronę konkluzyi kompromisowej, o której zamierzamy obecnie pomówić.

Przedstawiamy tu najpierw główne punkty metodyczne każdego z dwóch zasadniczych działów, na jakie rozpada się nauczanie według wspomnianego powyżej poglądu. Pierwszy dział obejmuje poznawanie zakresu liczbowego od 1—100 zapomocą dodawania, odejmowania, dopełniania i rozkładania; drugi — zapomocą mnożenia, mierzenia i dzielenia.

W pierwsnym dziale wyróżniamy następujące momenty: 1-o działania z całymi dziesiątkami, 2-o tworzenie kolejne liczb porządkowych w całym zakresie, 3-o dodawanie liczby jednocyfrowej i odejmowanie takiejże liczby od liczb całego zakresu bez tworzenia lub pożyczania dziesiątka, 4-o takie same działania z tworzeniem i pożyczaniem dziesiątków, 5-o dodawanie do całkowitych dziesiątków liczby dwucyfrowej i odejmowanie od tejże całkowitych dziesiątków, 6-o dodawanie i odejmowanie liczb dwucyfrowych bez tworzenia i pożyczania dziesiątków i nakoniec 7-o ogólne dodawanie i odejmowanie liczb dwucyfrowych. Następstwo tych momentów jest zrozumiałe i specyalnych tłomaczeń chyba nie wymaga. Dodamy naturalnie jeszcze, że przy każdym z nich występują odpowiednie przykłady, zadania i zapisywanie, — o czem jeszcze pomówimy.

W drugim dziale kapitalne znaczenie ma tabliczka mno-

żenia, której towarzyszy mierzenie i dzielenie o tyle, o ile do tego daje ona podstawę. Czy w poznawaniu tabliczki mnożenia niepotrzebne jest pewne stopniowanie? Tutaj również nie trzeba chyba podawać motywów dla odpowiedzi twierdzącej, chodzić może tylko o to, jakie to ma być stopniowanie. Niektórzy metodycy wysuwają jako jeden z głównych momentów stopniowania jednorodność szeregów tabliczki mnożenia, t. j. poznawanie tej tabliczki nie w kolei wielkości liczb: 1, 2, 3, 4, ..., 10, ale partyami, łącząc w jedną partyę liczby podobnie utworzone, a więc do pierwszej partyi zaliczają 1, 5, 10, do drugiej 3, 6, 9, do trzeciej 2, 4, 8 i nakoniec do czwartej — 7. Takie stopniowanie w poznawaniu tabliczki mnożenia ma dużą zaletę, gdyż łatwiej jest 1-o poznać mnożenie przez 3, potem przez 6 i 9, bo liczby tworzą się z trójki, a 2-o spamiętać kolejne iloczyny. Z tej racyi uważamy również, że podobne stopniowanie jest wygodne. Po drugie, całą tabliczkę mnożenia można podzielić na dwie części: do jednej zaliczamy mnożenie wszystkich liczb pierwszego dziesiątka przez 1, 2, 3, 4, 5, a do drugiej mnożenie liczb większych niż 5 przez takież liczby. Tę drugą część radzą niektórzy przenieść na rok trzeci, z czem nie można się nie zgodzić. Tabliczka mnożenia ma tak wielkie znaczenie w rachunku, a dobre jej przyswojenie, t. j. takie, które jednocześnie wpływa na rozwój umysłowy dzieci, wymaga tyle czasu, że nie można się temu dziwić. Nauczyciele klas wyższych szkoły średniej wiedzą, jakie rezultaty osiągnąć jest w stanie pośpiech forsowny w klasach niższych, albo w szkole elementarnej. Stara metoda mnemoniczna jak najmniej tu się nadaje. Nauczyciel winien w stkie środki wyzyskać, aby umocować, że tak powiem bliczkę mnożenia w pamięci dzieci, i to nie tylko przez częste powtarzanie, ale powołując do pomocy środki uzmysławiające tam, gdzie można, i nadewszystko logiczne czynniki Uczeń powinien posiadać nietrudną drogę, metodę do uzupełnienia zapomnianego ogniwa. Aby wytworzyć taką metodę, należy do pomocy powołać inne działania: dodawanie i odejmowanie, a także własności mnożenia: prawa przemien-

nościowe i rozdzielnościowe. Np. uczeń zapomniał, ile będzie 6×7, a pamięta dajmy na to, ile jest 5×7. Pomaga mu tu zaraz dodawanie i prawo rozdzielnościowe. Z drugiej strony, jeżeli organicznie zapomocą wspomnianych działań i praw powiązać będziemy umieli oddzielne momenty tabliczki mnożenia, tem samem stworzymy podstawę do tego, by uczeń nie tylko wierzył ślepej pamięci, ale i własnej głowie.

Zwrócenie uwagi na tę ostatnią stronę rzeczy daje nam w ręce sposób powiązania poprzednich działów. Uczniowie przez dodawanie i odejmowanie w takim stopniu muszą poznać liczby w zakresie od 1—100, aby niezależnie od samej wartości tego poznania mieli jeszcze możność świadomego przyswajania sobie tabliczki mnożenia. Stąd wynika, że poznawanie przez dodawanie i odejmowanie musi poprzedzać tabliczkę mnożenia, która powinna się z temi działaniami przeplatać w organicznie powiązany ciąg. Przedstawimy teraz, jak się tę rzecz powinno traktować.

Przedewszystkiem zaznaczyć muszę, że nauczanie nie jest przechodzeniem oddzielnych paragrafów książki. Na każdej lekcyi w zadaniach i przykładach możemy powtarzać rzeczy poprzednie, a więc wtedy, gdy główną treścią lekcyi jest pewien moment dodawania i odejmowania w zakresie 100, nauczyciel może nieraz w zadaniu lub pytaniu przy sposobności sprawdzać umiejętność mnożenia i dzielenia w ramach poprzednio poznanych.

Najpierw przechodzimy pierwsze pięć punktów ze wspomnianych poprzednio, a więc zajmujemy się głównie dodawaniem, odejmowaniem, dopełnianiem i rozkładaniem, odpowiednio do tego, co w tych punktach jest wspomniane. Pożądane tu jest zdobycie należytej wprawy, jak wszędzie. Jako środka poglądowego używamy liczydła. Rzecz jasna, że cały rachunek odbywa się w pamięci, zapisywanie odbywa się w jednym wierszu i niema mowy o żadnym schemacie rachunku piśmiennego. Każdą liczbę dwucyfrową, do której np. dodajemy jednocyfrową, uczymy najpierw rozkładać na 2 części. Np. trzeba dodać: $45 + 3$. Powiadamy: $45 = 40 + 5$; $45 + 3 = 40 + 5 + 3 = 40 + (5 + 3)$. To ostatnie dosko-

nale się uzmysławia na liczydle. Swoją drogą należy dbać o to, aby dzieci rozumiały celowość podobnego sposobu postępowania. Np. dodanie 3 do dziesiątków niczego nam nie ułatwi, bo będziemy mieli do dodania $43 + 5$, a więc lepiej jest jedności dodawać do jedności i t. p. Dobrze też jest zwrócić uwagę na sumę $3 + 45$ i prawo przemiennościowe.

Mnożenie liczb pierwszego dziesiątka przez 2 powinno być już znane, tak samo jak mnożenie przez siebie liczb pierwszej piątki prócz $5 \times 5 = 25$. Z kolei następuje teraz mnożenie liczb przez 4. Największym iloczynem, który był poznany dotąd, jest $4 \times 5 = 20$. Dalej mnożymy 4×6. Stosujemy tu prawo rozdzielnościowe: $6 = 5 + 1$, $4 \times 6 = 4 \times (5 + 1) = 4 \times 5 + 4 \times 1 = 24$. Zwracamy uwagę, że mając iloczyn przez 5, aby otrzymać iloczyn przez 6, należy do poprzedniego dodać jedną czwórkę. Tak samo, aby z iloczynu ostatniego otrzymać pierwszy, trzeba tę czwórkę odjąć. Uzmysławiamy naturalnie operacyę na liczydle. Dalej nauczyciel może zapytać, ile będzie 2×6. Jest to rzecz znana. Ile dziesiątków zawiera 12, a ile 24? Ile razy więcej w drugim przypadku? To samo o jednościach. Ile razy większe jest 24, niż 12? W odpowiedni sposób można to uzmysłowić. Tak samo postępujemy z iloczynami 4×7, 4×8, 4×9, 4×10. Tutaj można każdą liczbę: 7, 8, 9, 10 rozkładać na 2 części: $6 + 1$, $7 + 1$ i t. d., albo: $5 + 2$, $5 + 3$, $5 + 4$, $5 + 5$ i stosować prawo rozdzielnościowe. Można tu tworzyć następujące szeregi: 4×1, 4×2, 4×3 i t. d., albo: 4×1, 4×3, 4×5 i t. d., albo: 4×1, 4×4, 4×7, 4×10, albo 4×1, 4×5, 4×9. Inne możliwe szeregi z 4 są bezużyteczne.

Nauczyciel, przy mnożeniu np. 4×7, powinien wobec pomyłki ucznia natychmiast nasuwać mu wspomniane sposoby wynajdywania iloczynu. Takich sposobów narazie jest trzy: 1-o na zasadzie zastosowania prawa rozdzielnościowego, np. $4(5 + 2)$, 2-o na zasadzie dodawania $4 \times 6 = 24$; $24 + 4 = 28$, 3-o na zasadzie odejmowania $4 \times 8 = 32$; $32 - 4 = 28$. Mniejsza, który z tych sposobów uczeń zastosuje, byle robił to świadomie. W każdym razie właściwie główną rolę odgry-

wa tu prawo rozdzielnościowe, zapomocą którego sprowadzamy tutaj tabliczkę mnożenia przez liczby pierwszej piątki do mnożenia tych liczb przez siebie, co znane jest z poprzedniego zakresu. W ten sam sposób traktujemy mnożenie przez 3 i przez 5. Jest to pierwsza część tabliczki mnożenia, w której iloczyny nie przekraczają 50 i pozwalają nam razem z dodawaniem i odejmowaniem poznać ten zakres bliżej. Gruntowne poznanie i utrwalenie w pamięci tej części tabliczki mnożenia zajmuje dużo czasu i dlatego wykraczanie poza ten zakres w drugim roku jest zawsze ryzykowne, chyba że mamy przed sobą nie zwykłą klasę, ale kilku zdolnych uczni. Pamiętać należy jedno, że poznanie schematycznego wykonywania działań piśmiennych przy umiejętności dodawania i odejmowania liczb pierwszych 2 dziesiątków i „wykutej" tabliczki mnożenia jest możliwe, jak uczy codzienne doświadczenie; ale czy to jest nauczanie matematyki, to już inna kwestya.

Zakres drugiego roku jest w ten sposób właściwie wyczerpany. Wspomniane punkty 6 i 7 są tym dodatkiem, który w szczęśliwych okolicznościach można wypełnić w tej lub innej mierze, albo odłożyć do roku następnego. Rozszerzenie zakresu liczbowego wywołuje konieczność poznania nowych miar. Wchodzą tu już miary długości, jak centymetr, cal; miary wagi, jak pud, funt i łut; miary czasu, jak minuta, doba, rok i t. p. Takie zwiększenie liczby miar wywołuje większą rozmaitość zadań i przykładów i także wymaga czasu. Jeżeli do tego dodamy mierzenie i dzielenie liczb odpowiednio do mnożenia, łatwo się przekonać możemy, że całość kursu jest duża; trzeba ją tylko dobrze przerobić.

Jedną z ważnych zalet dobrej metody nauczania jest umieć uczyć dzieci dostrzegania pewnych cech charakterystycznych danej liczby. Pomaga to w rachunku pamięciowym, który przez to staje się mniej mechanicznym, a zarazem przygotowuje grunt do dalszych uogólnień. Podam tu kilka przykładów. Np. odróżnianie liczb parzystych i nieparzystych, liczb dzielących się przez 3 i nie, liczb dzielących się przez 5 i nie i t. p. Pogłębianie nauki daje co-

raz więcej potrzebnego materyału myślowego do tych spostrzeżeń. Indukcyjne rozumowanie w nauczaniu początków jest jedynie możliwe, a opiera się ono na materyale spostrzeżeń. Pamiętać zawsze należy o tem, co będzie dalej, i przygotowywać do tego grunt. Im ważniejsza to jest rzecz, tem dłuższego dojrzewania wymaga; i dlatego żaden nauczyciel nie pożałuje takiego rozkładania na dłuższe okresy czasu. O tem jeszcze niżej pomówimy.

ROZDZIAŁ VI.

Trzeci rok obejmuje zakres od 1—1000. Odpowiada on naszej klasie wstępnej w szkole średniej. Praktycznie zakres ten ma największą wartość, gdyż w życiu codziennem rzadko rachunek wychodzi poza te ramy, szczególniej w tej sferze ludzi, do której należą dzieci naszych szkół elementarnych. Nauczanie w tym zakresie wyróżnia się przez następujące momenty: 1-o udoskonalenie i pogłębienie rachunku pamięciowego, 2-o poznanie czterech działań arytmetycznych w całej ich rozciągłości, 3-o wprowadzenie rachunku piśmiennego, 4-o planowe rozwiązywanie zadań i wprowadzenie liczb t. zw. wielorakich.

Rachunek pamięciowy wszechwładnie panuje w 1-ym i 2-im roku, gdzie tylko zapisujemy rezultaty obliczeń, ale obraca się on jeszcze w dość szczupłych ramach. W trzecim roku gruntowniejsza znajomość własności działań i sposobu tworzenia liczb pozwoli na lepsze jego ugruntowanie. Nie przestaje on mieć tutaj swej wartości: uczeń powinien dość swobodnie we wspomnianym zakresie władać rachunkiem pamięciowym, jakkolwiek nie jest to możliwe do osiągnięcia tylko w trzecim roku, ale wymaga również dalszej wprawy. W pierwszych 2 latach poznajemy dokładniej dodawanie i odejmowanie, w trzecim roku kończy się nauka tabliczki mnożenia, wchodzi również dzielenie z resztą, wchodzą działania z liczbami wielorakiemi, których wartość metodyczna polega głównie na uogólnieniu sposobów działań.

Ponieważ wprawa w pamięciowem wykonywaniu działań, jako rezultat znajomości ich własności i budowy liczby, jest w tym wypadku dostateczną gwarancyą owładnięcia materyałem nauki, można już przejść do stworzenia schematu piśmiennego, tembardziej że nieraz wymaga tego sama siła rzeczy przez wzrost liczby i związaną z tem trudność spamiętania większego szeregu drobnych operacyi przy wykonywaniu działań. Wobec tego wszystkiego pierwsze trzy lata stanowią podstawę całego rachunku. Jeżeli ta podstawa jest dobrze ugruntowana, reszta idzie bez wielkich trudności. Nauczanie w tych latach wymaga wielkiej cierpliwości i staranności, ale zato dobre nauczanie później sowicie się opłaca.

Cały materyał w trzecim roku, jak poprzednio, rozpada się na 2 główne części: uzupełnienie wiadomości z pierwszej setki i tworzenie dalszych liczb szeregu naturalnego. Teraz zwrócimy tu uwagę na zalety podobnego rozkładu materyału. Zdobywamy przez to konieczną ciągłość w nauczaniu. Nauczyciel, który musi jeszcze uzupełnić niektóre działy z poprzedniego zakresu, z konieczności lepiej powtórzy poprzednie, a powtórzenia nigdy się nie żałuje. To jedno. Po drugie, znany jest fakt psychologiczny, że pewien okres pracy nad pewnym przedmiotem jeszcze nie wystarcza służy on niejako do rozpędu, do wyprowadzenia z równowagi sił psychicznych, które później pracują jakby same przez się, *nieświadomie*. Przejawia się to i w małych rzeczach i w większych. Każdy wie, że w toku pracy nad jakim nowym przedmiotem, wobec mnóstwa powstających pytań, wątpliwości, jesteśmy jakby w chaosie. Dopiero później pytania te albo znajdą odpowiedzi, albo ustępują i rozhukane morze uspakaja się, wschodzi słońce jasności. Po trzecie, uważamy za jedną z podstawowych zasad nauczania—rozkładanie materyału na dłuższe okresy czasu. Zwykle to się nazywa koncentrycznem przechodzeniem przedmiotu. Coś podobnego tu jest, ale wolelibyśmy nazwać to lepiej metodą genetyczną. Duże dawki nie są strawne, a nawet w najmniejszych liczbach przejawiają się te same pra-

wa, co w większych. Powolne i stopniowe zaznajamianie się z niemi, stopniowy wzrost głównych pojęć, wyrażających się w własnościach działań i tworzeniu liczb szeregu naturalnego, a także powolne, ale trwałe rozwijanie się wprawy w wykonywaniu działań, może być osiągnięte tylko przez takie traktowanie. Dlatego między innemi przyczynami nie uważamy za możliwe poza pierwszym rokiem rozdzielania działań, jak to niektórzy proponują.

Głównym materyałem w pierwszej części jest zakończenie dodawania i odejmowania liczb dwucyfrowych, nie wychodząc poza pierwszą setkę, i zakończenie tabliczki mnożenia z towarzyszącem jej dzieleniem.

Dodawanie liczb dwucyfrowych wtedy, gdy suma jedności jest mniejsza niż dziesięć, uzmysławiamy na liczydle w następujący sposób. Dajmy na to, mamy dodać 24 i 35:

1-a pozycya na liczydle:	2-a pozycya na liczydle:
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○	● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	● ● ● ● ● ● ● ● ● ●
● ● ● ● ● ● ● ● ● ●	○ ○ ○ ○ ● ● ● ● ●
● ● ● ● ●	

Komentarzy tu nie trzeba. Jednocześnie z takiem dodawaniem można prowadzić dodawanie liczb wielorakich o dwóch wyrazach, przyczem metr i decymetr mogą służyć tutaj za bardzo odpowiedni przykład. Rzecz jasna, że miary te powinny być dobrze poznane przez pokazanie i przyzwyczajenie do nich oka. Dobrze jest mieć w klasie stale okazy miar (na początku długości, a potem inne), aby uczniowie przez ciągłe przypatrywanie się zdobyli jasne wyobrażenia. Zaleca się jednakże unikać tablic, na których skupione są różne miary (np. powierzchni, długości, objętości), gdyż takie skupienie nie pozwala skoncentrować uwagi. Na jednej tablicy mogą być miary jednego rodzaju; później do niej dostawiamy miary inne, odpowiednio ułożone i t. d. Zapisywanie odbywa się zwyczajnie: 2 m. 4 dm. + 3 m. 5 dm. = 5 m. 9 dm.

Takie jednoczesne przechodzenie dodawania liczb wielorakich pozwala ugruntować samo pojęcie dodawania oddzielnie dziesiątków i jedności. Ludzie przyzwyczajeni do tego, by z liczb wielorakich robić osobny dział, gotowi są posądzić mnie o herezyę. Nic innego nie robię, jak tylko stosuję zasadę rozkładania na dłuższe okresy czasu. Z drugiej strony wiara w nadzwyczajne własności liczb wielorakich, dzięki którym wytwarza się z nich osobny dział, nie ma najmniejszej podstawy, ani naukowej, ani dydaktycznej. Zrozumiałem jest, że zanim przejdziemy do tego specyalnego przypadku dodawania, powtarzamy poprzednie.

Odejmowanie w tym przypadku również da się uzmysłowić w ten sposób, że odjemną rozpatrujemy samą, a następnie, odwracając kulki na inny kolor, wykluczając z niej tyle, ile wynosi odjemnik. Dopełnianie i rozkładanie stanowi też ważną czynność.

W ostatnim przypadku najogólniejszym dodawania i odejmowania można przy dodawaniu uwzględnić 2 momenty. Np. mamy dodać: $35 + 27$. Dodajemy dziesiątki: 50; dodajemy jedności: 12. Razem: 62, przyczem powołujemy się tutaj na rzecz już dzieciom znaną poprzednio. Dalej można przy przejściu do dodawania liczb trzycyfrowych uwzględnić inny sposób: najpierw dodajemy jedności: $5 + 7 = 12 = 10 + 2$ (rozkładanie), Następnie otrzymany dziesiątek przyłączamy do dziesiątków: $(3 + 2) + 1$ [albo $(1 + 3) + 2)$ lub $(1 + 2) + 3$]. Stanowi to przejście do rachunku piśmiennego. Przy odejmowaniu nastręcza się wyraźniej sposobność do pewnego rozumowania: wygodniej jest zaczynać od odejmowania jedności. Uzmysławianie prowadzimy w ten sam sposób, przyczem ostatni dziesiątek będzie złożony z kulek 2-ch kolorów. Po pewnym czasie, gdy nauczyciel odczuwać zacznie, że dzieci sprawnie dość rachunkiem w zakresie tych działań władają i że pojęcie dziesiątka i jedności stało się rzeczą jakby zupełnie zwyczajną, naturalną, można dziesiątki uzmysławiać też jedną kulką, umówiwszy się, jak w systemie pozycyjnym, na pierwszym drucie stawiać jednostki, na drugim dziesiątki. Zrodzi to zaraz pytanie o przeznaczeniu dal-

szych drutów i stanowi naturalne przejście do wytworzenia nowej jedności.

Ale z pierwszą setką sprawa jeszcze nie skończona: mamy przecie do wykończenia tabliczkę mnożenia, której część poznaną ciągle stosujemy w zadaniach. Muszę tu nadmienić, że zadania komplikują się przez występowanie szeregu pytań i tem samem wymagają więcej namysłu. Nie można jednakże radzić, by tych pytań było więcej, jak 3—4. Nie zapominajmy bowiem nigdy, że na tym stopniu większą korzyść odnoszą dzieci z rozwiązania kilku zadań mniejszych, niż jednego lub dwóch większych. W tej dziedzinie konieczne jest również stopniowanie, a każdą rzecz dzieci powinny robić dobrze, gruntownie. Duży szereg pytań przy tej samej treści konkretnej nuży umysł jeszcze mało wyrobiony, a mało daje pola do wprawy w rachunku. Przy rozwiązywaniu zadania należy wychodzić z pytania głównego i następnie drogą analityczną posuwać się do rzeczy znanych, w zadaniu danych; następnie przejść odwrotną drogę, która daje plan zadania. Naturalnie, nie w każdem zadaniu tak trzeba robić: byłoby przedewszystkiem nudne podobne postępowanie; ale przynajmniej te zadania, w których układ działań jest odmienny, wymagają na początku takiego traktowania. Ze wszystkiego można zrobić bezduszny schemat; otóż nauczyciel powinien pamiętać, że pragnie dac uczniowi pewną zawsze przydatną metodę, ale nie krępować jego intuicyi i sił twórczych. W każdej dziedzinie nauczania spotykamy się z pytaniami, w których odpowiedź nie da się nigdy wyrazić ogólnem, niewzruszonem prawidłem: uczymy żywe dzieci, które same myślą i myśleć winny, a stąd potrzeba nie dającej się uchwycić w stałe karby teoryi umiejętności w postępowaniu nauczyciela.

Uzupełnienie tabliczki mnożenia polega na mnożeniu liczb 6, 7, 8, 9, 10 przez siebie. Zasadniczy punkt wyjścia i podstawa uzmysłowienia, polegające na przedstawieniu iloczynu jako sumy, i tu ma miejsce jako środek pomocniczy, środek, że tak powiem, konkretny. Środkiem pomocniczym formalnym są w dalszym ciągu prawa rozdzielnościowe i prze-

miennościowe. Powtarzając poprzednią część tabliczki mnożenia zapomocą znanego sposobu układania kulek w prostokąt, wykazujemy, że 5×6 jest tem samem, co 6×5 i t. d. Służy to jednocześnie za przygotowanie do rzeczy dalszych. Np. mnożenie przez 6: $6 \times 7 = 6 (5 + 2) = 6 \times 5 + 6 \times 2 = 5 \times 6 + 2 \times 6 = 30 + 12 = 42$. W taki sposób wykonywamy mnożenie przez wszystkie liczby w tym zakresie, zachowując uszeregowanie, o którem mówiliśmy poprzednio. A więc powtarzamy mnożenie przez 2, 4 i dodajemy iloczyny przez 8. W ten sam sposób tworzymy iloczyny przez 1, 5, 10, przez 3, 6, 9 i nakoniec przez 7. Dla ugruntowania wiedzy używamy do sprawdzania tabliczki dodawania i odejmowania, jak powyżej. Dobre są również pytania, jak następuje: $42 = 3 . 6 + ?$, $5 . 4 + 5 . 5 = ?$ i t. p. Z powyższego wynika, że mnożenie przez liczby 1, 2, 3, 4, 5 wszystkich liczb pierwszego dziesiątka ma duże znaczenie i dlatego niewzruszona pewność tutaj jest konieczna, którą dwustopniowe przechodzenie tabliczki mnożenia może tylko wzmocnić.

Opierając się na prawie rozdzielnościowem, możemy zarówno dla wprawy w tabliczce mnożenia, jak dla zamiany miar i zadań uprawiać mnożenie niewielkich liczb dwucyfrowych przez jednocyfrowe. Nie jest to trudne, a ma znaczenie metodyczne nie tylko pod względami wspomnianymi, lecz i z tej przyczyny, że stanowi drugi łańcuch tworzenia nowych, większych liczb. Dodawanie liczb dwucyfrowych prowadzi do wyjścia poza pierwszą setkę, tak samo mnożenie liczb pierwszych dwóch dziesiątków przez liczby pierwszego dziesiątka odbywa się w zakresie 200. Z tej uwagi natychmiast wypływa nowy stopień w nauczaniu.

Równolegle do mnożenia odbywa się dzielenie i mieszczenie. Działania te uzupełniamy uwzględnieniem reszty. Pomyślne wykonywanie dzielenia jest tu możliwe tylko przy dokładnej znajomości tabliczki mnożenia, tembardziej że to ma miejsce już wcześniej przy dzieleniu liczby dwu- i jednocyfrowej przez jednocyfrową bez reszty. Przy równoległem traktowaniu obu działań wrazi się w pamięć i myśl dzieci fakt, że od iloczynu możemy zaraz przejść do ilorazu Jeżeli wiem, że

$6 \times 7 = 42$, to 6 mieści się w 42 siedem razy, 7—sześć razy; 42 zawiera 6 liczb równych każda 7 i t. d. Stąd przy zadanem pytaniu, ile razy 8 mieści się w 56, dziecko uświadamia sobie z tabliczki mnożenia fakt, że $56 = 8 . 7$ i odrazu ma odpowiedź; główną więc rzeczą jest rozkładanie liczb na czynniki. Wprawa w dodawaniu i odejmowaniu również tu jest pomocną. Jeżeli uczeń zapomniał, że $7 . 8 = 56$, to może pamiętać, że $6 . 8 = 48$, a skombinuje, że $56 = 48 + 8 = 6 \times 8 + 1 \times 8$, a stąd na zasadzie prawa rozdzielnościowego da odpowiedź. Takie właśnie rozkładanie na sumy jest potrzebne przy przejściu do reszty. Np. $47 : 9 = ?$ Uczeń pamięta, że $5 \times 9 = 45$, dalej wie, że $47 = 45 + 2$, a stąd wyprowadza wniosek, że $47 = 5 . 9 + 2$.

Powstaje tutaj pytanie, jak oznaczać resztę. Niektórzy radzą dopisywać ją w postaci mniejszej cyfry przy rachunku piśmiennym do ilorazu, inni obstają za ułamkiem, inni zalecają zapisywać tak, jak mówimy: „i reszta 2“. Drugi sposób nie wydaje mi się racyonalnym. Ułamek na tym stopniu jest jeszcze czemś konkretnem, pochodzenie jego z formalnego procesu dzielenia nie jest dla ucznia widoczne, a stąd jest trudne, nawet za trudne. Trzeci sposób wprowadza do rachunku zmudne pisanie, które może się przerodzić w bazgranie, jeżeli nauczycielowi matematyki żal czasu na kaligrafię, co jest poniekąd zrozumiałe. Z tego wynika, że najlepszy jest pierwszy sposób.

Mając zamiar rozszerzyć dalej zakres liczbowy, musimy jednakże dać pewne bliższe i jaśniejsze wyobrażenie o setce. Dziesięć dziesiątków na liczydle, jeżeli to ostatnie posiada tyle drutów, co jednakże jest możliwe, metr i centymetr, — oto główne sposoby uzmysłowienia. Przesadzają, mojem zdaniem, ci, którzy, jak np. Walsemann, pragną dać wyobrażenie tysiąca. Pomimo dość dowcipnego ugrupowania punktów, nigdy jaśniejszego wyobrażenia tak dużego zbioru otrzymać nie można. Daleko łatwiej to zrobić dla setki, ale i tutaj o tak jasnem wyobrażeniu, aby oddzielne elementy zbioru mogły być odróżniane i notowane, przecie mowy być nie może. Nawet dziesiątek przez większość ludzi nie jest w ten

sposób wyobrażany. Jesteśmy przy setce na granicy uzmysławiania, nie mamy więc na względzie pomocy, jaką naszym uczniom okazać może faktycznie taki duży zbiór przedmiotów, lecz niejako zillustrowanie faktu, że na tej drodze niema co szukać tej pomocy, że trzeba uciec się już do sił wewnętrznych własnej myśli. Dalej po kolei tworzymy następne liczby szeregu naturalnego, najpierw licząc 110, 120 i t. d., a później z jednościami. Rzecz jasna, że jednocześnie możemy zapisywać te liczby, a także każdą daną przez nauczyciela liczbę uczniowie obowiązani rozkładać na elementy, np. 137 = 1 setka + 3 dziesiątki + 7 jedności. Ile dziesiątków w całej liczbie? Ile ich na miejscu dziesiątków? Ile jedności w całej liczbie? i t. d. Uczniowie zwykle szybko oryentują się w tem liczeniu.

Następnie przechodzimy do działań. Powtarzamy po kolei pierwszy rok nauczania i wszystkie momenty (7) wymienione w poprzednim rozdziale i jednocześnie wykonywamy odpowiednie działania, gdzie w jednej z liczb wchodzi setka. Np. dodajemy: 53 + 9 = 62, a jednocześnie obok 153 + 9 = 162 i dajmy na to 147 + 6 = 153. Takie jednoczesne powtarzanie rzeczy poprzednich i posuwanie się dalej ma znaczenie pod tym względem, że podkreśla bardzo dobrze jednorodność postępowania. W końcu uzupełniamy poprzednio nie dokończoną tabliczkę dodawania, dodając liczby, których suma przekracza setkę, a jednocześnie przekraczamy 200, dodając liczby, z których jedna jest trzycyfrowa, np. 154 + 87.

Tutaj już pora wprowadzić zwyczajny schemat, używany przy rachunku piśmiennym, przyczem trzeba zawsze pamiętać, że rachunek pamięciowy nie odbywa się koniecznie w ten sam sposób. W rachunku pamięciowym wygodniej często dodawać poczynając od większych jedności porządkowych, a w piśmiennym robimy naodwrót. Daje się często zauważyć, że dzieci tak samo pamięciowo rachują, jak piśmiennie. Przyczyną tego jest za wczesne wprowadzenie schematu piśmiennego wykonywania działań, albo niezdawanie sobie sprawy, że rachunek pamięciowy z natury rzeczy mu-

si być wolny od schematów podobnych i przystosowywać się do danych okoliczności, do natury liczb. Np. zwrócenie uwagi ucznia, że przy mnożeniu 2×19 można postępować w pamięci tak: $2(20 - 1) = 40 - 2 = 38$, jest zupełnie na miejscu. Przy zapisywaniu liczb odgrywa dużą rolę porządek i pisanie wyraźne. Tego nauczyciel powinien stanowczo wymagać. Nieporządne i rozrzucone rachunki są często powodem błędów i niedopatrzeń, które przy tem wszystkiem trudno jest sprawdzić i poprawić. Znaczny bardzo procent uczniów klas wyższych szkoły średniej posiada tę wadę, z której nie tak łatwo później wyleczyć. Jednocześnie z rachunkiem piśmiennym utrwalić się winna ostatecznie terminologia, a więc nazwy liczb wchodzących do działania i używanych znaków.

Z poprzedniej nauki uczniowie mają pojęcie o niektórych własnościach działań; ma również duże znaczenie podkreślanie wczesne zmiany sum, iloczynów i t. p. skutkiem zmiany elementów działania. Każdy doświadczony nauczyciel wie, że uczniowie nie zdają sobie dobrze sprawy z takiego faktu: mnożną zwiększyliśmy 2 razy, mnożnik 3 razy; ile razy zwiększy się iloczyn? Fakt to jeden z wielu. Nie chcę tu zaznaczać, że jest zadaniem trzeciego roku nauczania wyjaśnianie tych rzeczy, podkreślam tylko, że w tej dziedzinie, jak i w innych, powinno mieć miejsce stopniowanie. Zmiany sumy przez badanie i odejmowanie od składników mogą być zillustrowane nawet na liczydle i dlatego nadają się bardzo do wczesnego już zaznaczania. Trudniej dać sobie radę w tym względzie ze zmianami iloczynu i ilorazu, ale taki fakt, że zamiast mnożenia przez 6 jednorazowego można, dajmy na to, pomnożyć najpierw przez 2, potem to, co otrzymamy, przez 3, nie powinien nawet na tem stadyum nauczania być obcym uczniowi. Wczesne wprowadzenie pojęcia pola prostokąta np. daje bardzo dobry sposób do uzmysłowienia tych rzeczy; ale dlatego trzeba pewne pojęcia geometryczne wcześnie wprowadzać, czego się u nas nie robi. Używanie prostokątów, ułożonych z kulek liczydła, może być również przydatne, jak również dobrze dobrane przykłady konkretne i zadania.

Dalszy kurs nauki uzupełniamy mnożeniem wszystkich liczb pierwszej setki przez liczby jednocyfrowe i odpowiedniem dzieleniem, a także dodawaniem i odejmowaniem liczb, których suma nie przekracza tysiąca. Wszystko to stanowi materyał spory dla trzeciego roku nauki.

Zakres tutaj przechodzony pozwala na rozszerzenie odpowiedniego zakresu miar. Mogą występować miary duże, jak wiorsta, liczba dni w roku i t. p. Nieraz nie zdajemy sobie sprawy, że te duże miary są dla dzieci tylko słowami: nie odpowiada im żadne konkretne wyobrażenie. Stąd wynika, że tak samo, jak każdą mniejszą miarę uczeń musi mieć przed oczami i w ręku nieraz trzymać a także używać, duże miary również wymagają bliższego poznania. Dlatego dobrze jest wyzyskać wycieczkę, dać przykład z otaczającej miejscowości i t. p. Działania z liczbami wielorakiemi w tym roku uprawiamy dalej; mogą występować już liczby o trzech miarach, np. 3 m. 7 dm. 8 cm. Zadania na obliczenie czasu w zakresie jednego roku również mogą mieć miejsce. Niemałe ma znaczenie dokładne prowadzenie kalendarzyka w szkole. Kalendarzyk ten dobrze jest urządzić w ten sposób, aby uczniowie codzień sami nastawiali datę, a w odpowiednim czasie miesiąc. Do tego zwyczajny kalendarzyk ścienny, w którym kartki zdzieramy, nie nadaje się. Taka manipulacya może być wykonywana przez uczniów jeszcze w drugim roku nauki. Zaleca się również przyzwyczajanie dzieci do tego, aby przy każdem zajęciu piśmiennem w klasie czy w domu, np. przy ogólnem rozwiązywaniu zadań lub t. zw. klasówce, przy odrabianiu zadanej lekcyi dokładnie opatrywały datą każdą podobną czynność. Świadomość czasu biegnącego, wartości różnych jego części jest rzeczą ważną pod względem praktycznym. Różni ludzie w tym samym czasie różne mogą robić rzeczy nie tylko z powodu różnic indywidualnych, przyrodzonych, ale i z powodu pewnych przyzwyczajeń, mających początek często we wczesnem dzieciństwie. Umiejętność oszczędzania i oceny potrzebnego czasu jest rzeczą bardzo ważną Ileż to czasu nieraz tracimy po próżnicy skutkiem tego, że nam nigdy w dzieciństwie nie zwra-

cano uwagi, nigdy nie przyzwyczajano nas do liczenia się z temi chwilami, które przechodzą jednakowo dla każdego i nie wrócą już, chociaż nie były wyzyskane! Wyznaczanie czasu na określoną robotę, zapytania w tym rodzaju: jak długo idziesz do szkoły? ile na to lub owo tracisz czasu? mają swoje znaczenie nie tylko dla sprawy rachunku, nakazując szukanie i stosowanie liczby do codziennych spraw życiowych, ale i dla wychowania, dla wyrobienia poczucia obowiązku i woli.

W następnym roku nauczania przedewszystkiem powtórzymy materyał roku trzeciego; należy zabrać się do mnożenia i dzielenia przez liczby dwucyfrowe. Jest to jedną w ważniejszych kwestyi w czwartym roku i wymaga dużo ostrożności i umiarkowania. Prócz tego dodajemy liczby, których suma przekracza tysiąc. W czwartym roku kończy się właściwie nauka o liczbie całkowitej. Tutaj muszą być jasne zarówno własności zadań, jak sposób tworzenia liczb. W następnym rozdziale będę się starał uchwycić główne myśli i zasady metodyczne nauczania, jakie w zakresie liczby całkowitej stosowaliśmy, jakkolwiek niejedno już przy sposobności było powiedziane wyżej. W dalszych kwestyach, które występują zwykle w nauczaniu rachunku elementarnego wchodzą już elementy nowe: w ułamku mamy rozszerzenie, pojęcia liczby, a w zależności wprost i odwrotnie proporcyonalnej pierwsze wyraźne zaznaczenie pojęcia zależności funkcyonalnej między wielkościami. Skutkiem tego zarówno nauka ułamków, jak ostatni dział rachunku wymagają specyalnego rozważania, ale podstawą jest nauka o liczbie całkowitej. Jeżeli w tej ostatniej dziedzinie niema porządku i jasności, jeżeli opiera się ona na chwiejnych podstawach, próżno będziemy się kusili o gruntowność dalszej budowy. Są to rzeczy nieosiągalne w takich warunkach.

ROZDZIAŁ VII.

Jedną z głównych kwestyi, o których zawsze nauczyciel pamiętać winien, jest dobra znajomość tego przedmiotu, którego uczyć zamierzamy. Jeżeli się przyjrzymy dzisiejszej nauce w seminaryach nauczycielskich, to łatwo zauważyć możemy, że w tych zakładach przez dobrą znajomość przedmiotu zwykle rozumie się praktyczne jego opanowanie. Nader ważną jest rzeczą, gdy nauczyciel potrafi szybko, wprawnie i dokładnie rachować sam, ale nie jest to jeszcze dobrem przygotowaniem. Maszyna rachunkowa daleko prędzej, wprawniej może wykonać wszystko, czego rachmistrz od niej żąda. Tak, możnaby powiedzieć, ale maszyna nie rozwiązuje zadań, maszyna nie rozumie, dlaczego tak robi, a nie inaczej. Słusznie; ale co to znaczy rozumieć to, co się robi? Co to znaczy np. rozumieć dodawanie? Cóż łatwiejszego, — niejeden powie,—jak odpowiedzieć na to pytanie: rozumieć dodawanie znaczy to samo, co zdawać sobie sprawę z każdego kroku w tem działaniu. Ludzie zwykle nie zastanawiają się nad tem, że słówko „rozumiem" u różnych ludzi miewa różne znaczenia. Jeżeli dziecko lub człowiek mało inteligentny uchwyci pewien sposób postępowania (np. przy dodawaniu podpisywanie, dodawanie jedności i t. d.), wydaje mu się, iż rzecz rozumie: on wie, jak się robi, i to mu wystarcza. „Młodość chce przedewszystkiem tworzyć"—mówi Herbart; ale młodość również powinna myśleć. Otóż często to zdawanie sobie sprawy z każdego kroku jest niczem innem, jak tylko znajo-

mością tego, co trzeba robić. Czyż to jest rozumienie? Nie, jest to ten sam niemal stan umysłu, jaki np. znajdujemy u człowieka kierującego subtelną maszyną, dajmy na to rachmistrza w biurze. Może on sobie wcale nie zdawać sprawy ze szczegółów konstrukcyi, ale umie używać maszyny w praktyce. Rozumiem dodawanie, jeżeli mogę wykazać te przesłanki, na których proces się ten opiera, i wnioski z tych przesłanek (pewników) konsekwentnie, logicznie wyprowadzić umiem, starając się przytem, aby liczba owych przesłanek nie była niepotrzebnie za wielka, a także, by od siebie nie były one zależne. Rozumiem zjawisko przyrody, jeżeli potrafię przyczyny jego wyeliminować i następstwa przewidzieć. Umysł mniej wytrawny, mniej krytyczny posługuje się zwykle większą liczbą podstawowych przesłanek, używając ich często nieświadomie; krytyczniejszy z każdego kroku swego zdaje sobie sprawę i stara się zrobić zeń jedno z ogniw logicznego ciągu myśli. Naukowy, ścisły wykład arytmetyki wymaga właśnie takiego ciągu myśli, w którymby zarówno wszystkie przesłanki podstawowe były jasno wyznaczone, a wszystkie ogniwa znajdowały się ze sobą w ścisłej spójni logicznej. Rzecz jasna, że taki wykład dla dzieci przystępnym być nie może; ale pytam teraz, czy znajomość jego nie jest potrzebną nauczycielowi, czy nie ma znaczenia dla metody wykładu. Na to odpowiem stanowczo twierdząco. Kto nie zna naukowego wykładu, nie potrafi odróżnić błędnych „ułatwień" metodycznych od dopuszczalnych i potrzebnych, a co ważniejsza, zgubić się może w różnych sztucznych sposobach, miast szukać tych momentów, które po odpowiedniem ich przedstawieniu dzieciom mają istotną wartość zarówno metodyczną, jak naukową. Jak można jasno przedstawić rzecz, kiedy się samemu nie odróżnia tego, co zasługuje na większą uwagę, a co jest tylko podrzędnym szczegółem? Teorya ścisła nas uczy, że do tego, aby dodawanie stać się mogło jasnym procesem myśli, potrzebne są prawa przemienności i łączności, potrzebne są twierdzenia o dodawaniu sumy i różnicy, o dodawaniu do sumy. Jeżeli nauczyciel, pomimo całego poglądowego aparatu, pomimo wszystkich badań psy-

chologicznych, na te rzeczy uwagi nie zwróci, czy może być, pytam, proces dodawania zrozumiałym? Rachunek elementarny, czyli arytmetyka początkowa, jak to wskazuje historya, związany był ściśle z pewnemi zagadnieniami życia. Piętno, to wyraźnie dla wszystkich pozostało w t. zw. regułach działu trzeciego, pozostało również w interpretacyi rozumienia gdzie ujęcie samego procesu działania stanowi rzecz główną, a nie te logiczne pierwiastki myśli, z których proces ten konsekwentnie wynika. Poznanie reguły działania zgodnie z tradycyą dydaktyki mnemotechnicznej stanowi grunt główny nauczania. Cały aparat metodyczny jest przystosowany do tego, pomimo że wielu metodyków już tak znacznie przerosło ową metodę dawną nauczania. Najczęściej metodycy ci nie są matematykami, w seminaryach uczą ich matematyki „praktycznej", i oto nie potrafią sobie zdać sprawy, co w tem wszystkiem jest najgłówniejsze. Praktyka wykazuje, jak daleko są nasi uczniowie od rozumienia rzeczy, poucza nas, że owładnięcie praktyczne działaniem jest wogóle głównym rezultatem i poniekąd celem nauczania. Myśl dzieci kształci się przez dobre prowadzenie zadań, ale i tutaj są wady często, z których wynika, że cała nauka arytmetyki staje się nie tyle organem rozwijania samodzielnej myśli, ile narzędziem tę myśl tamującem.

Naturalnie, można mi zarzucić, iż wymagam od uczni takiego rozumienia, jakie jest dostępne dojrzałemu umysłowi Wiem jednakże, że to jest niemożliwe, ale wobec tego nie upada słuszność poprzednich uwag. Nie myślę żądać, by dzieci były w stanie konstruować w myśli ciągi logiczne, wychodzące z pewnych przesłanek, bo wiem, że do tego potrzeba myślenia sprawnego i wyrobionego, operującego ogólniejszymi symbolami liczbowymi; lecz za rzecz pożądaną i potrzebną uważam, aby zwracano w nauczaniu główną uwagę na to, co gra rolę główną, a nie na kombinacye tego lub innego pomysłowego metodyka. Dzieci powinny poznawać prawdy podstawowe, jakiem jest np. prawo rozdzielnościowe przy mnożeniu, nie jako twierdzenia w rozumowaniu dedukcyjnem, ale również jako prawdy przemawiające przez po-

gląd do wyobraźni, a przez nią dopiero do myśli. Psychologia nie może naruszyć wartości logicznej danych pojęć, może ona natomiast dać genezę ich rozwoju, dać sposoby wprowadzenia ich do myśli ucznia. Psychologiczne nauczanie musi być nauczaniem zawsze czegoś. Żeby zaś wiedzieć, czego mamy uczyć, musimy mieć cel jasny, wypukły obraz nauki, całą jej konstrukcyę logiczną. Inaczej będziemy błądzili po omacku i nie będziemy wiedzieli, o co tu właściwie chodzi. Tę rzecz uważam za bardzo ważną, jakkolwiek niemal stale omijaną i nierozumianą.

Myśl ucznia dojrzewa powoli, a poznanie pogłębia się i systematyzuje, różniczkując się jednocześnie. Tak jak embryon ludzki zawiera w sobie wszystkie dane po temu, by się rozwinąć na przedstawiciela rodzaju „człowiek", tak samo w nauczaniu, jeżeli chcemy, by myśl dzieci dojrzewała, by się rozwijała, trzeba jej dać te wszystkie pierwiastki, które dojrzewać mogą. Dojrzałość, wyrażająca się w sprawności wnioskowania dedukcyjnego, musi więc być rezultatem dłuższego procesu rozwojowego. Widzieliśmy wyżej, że jednem z zadań nauczania jest wytworzenie pojęcia liczby. To pojęcie przychodzi powoli, rozwija się od wyobrażeń zmysłowych. Tak samo prawa wiążące liczby powinny być poznawane. Uczeń spostrzega na oddzielnych przedstawionych przez nauczyciela przykładach jakąś własność liczb, zastosowuje tę własność do nowego przykładu, na którym również może się przekonać, że jest słuszną, i powoli zaczyna uważać tę własność za prawo ogólne. Uczeń w tym wypadku rozumuje indukcyjnie.

Dobrze będzie w kilku słowach scharakteryzować bliżej własności indukcyjnego rozumowania, gdyż w tej materyi nie zawsze panują jasne pojęcia. Zaczniemy od przykładów.

Chcemy, dajmy na to, udowodnić cechę podzielności przez 3. Na kilku kolejnych przykładach liczb konstatujemy, że „suma cyfr" daje przy dzieleniu przez 3 taką samą resztę, jak liczba cała. Sprawdza się to bez zaprzeczenia na liczbach jednocyfrowych, dwucyfrowych w drugim dziesiątku

i nawet dalej (zbyteczna brać wiele liczb, wystarcza właściwie bodaj jedna). Powiadam, gdyby ta własność była słuszna dla jakiejkolwiek liczby ciągu naturalnego, będzie natychmiast słuszna dla liczby następnej. Istotnie, przypuśćmy, że obrana liczba, zarówno jak jej „suma cyfr“, dają przy dzieleniu przez 3 resztę 2. W takim razie następna liczba w ciągu naturalnym będzie dawała resztę 0, t. j. podzieli się przez 3. Wytwarza się ona z poprzedniej przez dodanie jedności. Co się stać może z jej „sumą cyfr“? Jeżeli obrana liczba kończy się na 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, to dodanie jedności zwiększa tę sumę o 1, co sprawdza twierdzenie powyższe. Jeżeli liczba kończy się na 9, to dodanie jedności zmniejsza jej sumę cyfr o $8 = 2 . 3 + 2$, a więc nowa suma cyfr podzieli się również przez 3. Gdyby druga od końca cyfra była dziewiątką, suma cyfr zmieni się o $17 = 3 . 5 + 2$. Wogóle suma cyfr zmieni się o pewną liczbę razy po 9 mniej 1. I w tym przypadku twierdzenie jest słuszne. Stąd słuszne jest zawsze. Z tego wniosek, że wszystkie liczby wspomnianą własność posiadają, bo sprawdziliśmy, dajmy na to, rzecz dla 12 pierwszych liczb, będzie więc ona słuszna dla 13-u, a jeżeli dla 13-u, to i dla 14-u i t. d., więc zawsze.

Z jakich części składa się podobne rozumowanie? Z dwóch: w pierwszej dostrzegamy własność na kilku liczbach początkowych, w drugiej wykazujemy, że jeżeli jest ona słuszna dla jakiejś liczby N, to będzie słuszna dla $N + 1$. Ta druga część rozumowania jest trudniejsza. Ciekawy jest fakt, że podobnym sposobem można udowadniać wszystkie twierdzenia z arytmetyki liczby całkowitej. Można tak udowadniać w teoryi ścisłej *).

Jaki stąd wypływa wniosek dla nauczania? Ażeby rzecz jeszcze jaśniej przedstawić, weźmy znowu przykład. Wezmę takie zadanie: Mam n kulek jednakowych i uszeregowanych jedna za drugą. Nazwijmy te kulki po kolei $K_1, K_2, K_3, ..., K_n$.

*) Patrz książkę prof. S. Zaremby: „Zarys pierwszych zasad teoryi liczb całkowitych“. Nakł. Akad. Um. w Krakowie. 1907. Cena rb. 1 kop. 80.

Kulki te razem stanowią pewnc ugrupowanie. Przestawiam 2 z nich. Znowu otrzymam ugrupowanie z tych samych kulek złożone, ale inaczej uporządkowane. Pytam się teraz, ile takich ugrupowań różnych z tych kulek otrzymać można. Nazwę tę liczbę przez Π_n.

Probuję zaczynać od małej liczby kulek. Jeżeli jest jedna, to takich ugrupowań jest również tylko 1. To jasne. Jeżeli mamy 2 kulki, np. K_1 i K_2, to ugrupowań jest 2: $K_1 K_2$ i $K_2 K_1$. Jeżeli weźmiemy 3 kulki: K_1, K_2, K_3, to ugrupowań będzie 6: $K_1 K_2 K_3$, $K_1 K_3 K_2$, $K_3 K_1 K_2$, $K_3 K_2 K_1$, $K_2 K_3 K_1$, $K_2 K_1 K_3$. Więcej niema. Zapiszmy teraz otrzymane liczby tak:

$$\Pi_1 = 1$$
$$\Pi_2 = 2 = 1 . 2$$
$$\Pi_3 = 6 = 1 . 2 . 3.$$

Możnaby jeszcze spróbować utworzyć wszystkie ugrupowania dla 4 kulek, otrzymalibyśmy $\Pi_4 = 1 . 2 . 3 . 4$.

Widoczne jest prawidło tworzenia szukanej liczby. Ale czy matematyk rozumujący ściśle może na tem poprzestać? Nie, bo często mógłby się omylić. Np. gdyby na zasadzie spostrzeżeń na liczbach: 7, 14, 21 powziął myśl, że te liczby dzielą się przez 7, których „suma cyfr“ jest liczbą pierwszą, byłby w błędzie, bo zaraz następna liczba 28 nie sprawdza twierdzenia. Wzięliśmy bardzo oczywisty przykład, ale są mylne twierdzenia, które sprawdzają się dla bardzo wielu liczb. Do takich np. należy t. zw. twierdzenie chińskie, według którego wyrażenie $\frac{2^n - 2}{n}$ jest liczbą całkowitą, gdy n jest pierwszą liczbą, a ułamkiem, gdy n jest liczbą złożoną. Twierdzenie to sprawdza się dla wszystkich wartości n od 1 do 341. To też matematycy chińscy złapali się na tym przykładzie. Ale wróćmy do naszego rozumowania.

Jeżeli nie można poprzestać na powyższych spostrzeżeniach, to trzeba wykazać ogólną słuszność prawa tworzenia żądanej liczby Π_n. Gdyby powyższe prawo było słuszne dla jakiejś liczby m kulek, będzie słuszne, powiadam, dla $m + 1$.

Niech $\Pi_m = 1 . 2 . 3 .... m$. Nową kulkę K_{m+1} mogę dołączyć do każdego z otrzymanych Π_m ugrupowań, ale mogę dołączyć $m+1$ sposobami, bo mogę tę kulkę postawić przed pierwszą kulką w tem ugrupowaniu, przed drugą i t. d. i nakoniec po ostatniej. Z tego wynika, że z każdego z poprzednich Π_n ugrupowań mogę otrzymać $m+1$ nowych, należących do liczby Π_{m+1}. Ale w ten sposób wszystkie możliwe ugrupowania po $m+1$ wyczerpię, bo kulki $K_1, K_2, K_3 ... K_m$ w ugrupowaniach po m stoją na wszystkich możliwych miejscach, a nową kulkę postawiliśmy też na wszystkich możliwych miejscach. Z tego wynika, że jeżeli $\Pi_m = 1 . 2 . 3 ... m$, to $\Pi_{m+1} = 1 . 2 . 3 ... m (m+1)$. Przez m oznaczamy dowolną liczbę całkowitą, więc m może się równać 1, 2, 3, 4 i t. d., ale twierdzenie było słuszne dla 4, więc będzie słuszne dla 5, a jeżeli dla 5, to dla 6 i t. d. Jest więc słuszne zawsze.

Rzecz jasna, że pierwsza część powyższego dowodu może być nawet pokazana dzieciom,—jest prosta, składa się z jasnych spostrzeżeń; ale druga wymaga już rozumowania więcej skomplikowanego, trudniejszego. Takie rozumowanie nie jest dostępne dla dzieci. W podobny sposób można wykazać, że jeżeli znany proces dodawania jest słuszny dla liczb o m cyfrach, to będzie słuszny dla liczb o $m+1$ cyfrach. Tego rozumowania dzieciom nie podajemy. A w jaki sposób dochodzą one do przekonania o słuszności tego twierdzenia? Oto na zasadzie spostrzeżeń, zrodzonych na liczbach dwucyfrowych, trzycyfrowych i t. d., i uogólniając na wszystkie. W tem uogólnieniu tkwi brak ścisłości, bo niema dowodu. Co go zastępuje? Zastępuje go przekonanie, zdobyte niejako doświadczalnie, że istota procesu dodawania nie zależy od liczby cyfr, że wszystko będzie się odbywało tak samo, jak na liczbach poznanych. Takie przekonanie opiera się więc na pewnem założeniu o jednorodności procesu dodawania.

Weźmy teraz przykład z innej dziedziny. Przekonywamy się doświadczalnie, że wszystkie dane nam w doświadczeniu naszem ciała spadają: spada kamień, spada kawałek drzewa, spadamy my sami i t. d. Czy to doświadczenie

może wyczerpać kiedykolwiek wszystkie istniejące na kuli ziemskiej ciała małe i duże, lekkie i ciężkie, tworzące się na nowo, jak gwiazdki śniegu lub krople deszczu i t. p.? Rzecz jasna, że nie; a tymczasem twierdzimy, że „wszystkie ciała spadają“. Jakiem prawem? Oto zakładamy jednostajność działań przyrody, niezmienne powtarzanie się zjawisk, jeżeli powtarzają się te same warunki. Zakładamy to uprzednio i na tem opiera się nasz wniosek ogólny, na tem opiera się wnioskowanie przez indukcyę.

Łatwo widzieć analogię pomiędzy tym przykładem a powyższem rozumowaniem ucznia w arytmetyce. On tam też rozumuje indukcyjnie. Nauczyciel wie, że dzieci czasem zbyt pośpiesznie robią uogólnienia, ale na to jedyna rada dać przykład, w którym twierdzenie się nie sprawdza. Jedna, druga taka korekta — a młody matematyk poczuje, że potrzebna jest większa ostrożność i cierpliwość przy wnioskowaniu. My rozumiemy z drugiej strony, że indukcyjne rozumowanie nie jest dla arytmetyki właściwe; a z tego rozumienia wypływa, iż trzeba stopniowo doprowadzić ucznia do tego, aby mu indukcya służyła tylko do odkryć, do prób, ale stwierdzenia prawdy ma szukać na drodze dedukcyjnej. To jest zadaniem dalszych stopni nauczania matematyki; dla nas wystarcza poznanie samego charakteru dopuszczalnego i możliwego rozumowania ucznia. Nie będę się tu wdawał w szczegóły; nauczyciel, który zrozumiał istotę rzeczy, da sobie łatwo radę z każdym oddzielnym momentem. Jedno tylko nadmienię, że ponieważ proces indukcyjnego rozumowania stosuje się do poszczególnych liczb, musi być powtarzany w miarę ich wzrostu, a tem samem rzecz każda musi się rozkładać na dłuższe okresy czasu, jak to już nieraz wyżej wspominaliśmy.

Jeżeli nauczyciel zrozumie, że rzecz dana jest już dobrze przez uczni przetrawiona, może wyraźnie i ściśle sformułować prawidło, dać określenie. Bez tego niemożliwem byłoby przejście od rozumowania indukcyjnego do dedukcyjnego. Tu się znajduje jedna z częstych omyłek w nauczaniu, kiedy zapominamy, przechodząc do zupełnie odmiennego trak-

towania przedmiotu, przerzucić mosty, pozostawiając je domyślności uczni. Można pozostawić tej domyślności wiele rzeczy takich, o których szeroko się nieraz mówi, ale wspomnianej sprawy nie można. Sformułowanie może być słowne, jeśli nie jest za długie i nie nastręcza trudności stylistycznych. Legem brevem esse oportet... Może być też, i to właśnie w tych przypadkach, gdzie trudności powyższe są, z pożytkiem zastosowana formuła t. zw. algebraiczna. Niech się tego czytelnik nie przestrasza. Tam, gdzie jest pewność zrozumienia, taka formuła nie utrudnia rzeczy, lecz ułatwia. Np. prawo rozdzielności można przedstawić tak: $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$. Później można znak mnożenia opuścić. Takie formuły z pożytkiem stosuje prof. Dewey w nauczaniu elementarnem, a własne doświadczenie moje wykazało ich pożytek. Są one razem z formułami słownemi tem naturalnem przejściem od rozumowania indukcyjnego do dedukcyjnego. Można je stosować już w 3-im roku nauczania, ale dobrego nauczania, kiedy nauczyciel wie, czego nauczył.

Dedukcyjne rozumowanie przejawia się również w zadaniach o charakterze oderwanym i nawet w takich nieraz, gdzie fabuła ma treść konkretną. Trzeba tu wielkiej ostrożności, aby nie przesadzić i nie liczyć zbyt pochopnie na sprawność myślową ucznia. Często się w praktyce zdarza, że zadania daje się za trudne. Rodzice i korepetytorzy (oby ich było najmniej!) nazywają je łamigłówkami. Właściwie nie są to łamigłówki, ale zadania takie, w których liczymy na wyższą zdolność dedukcyjnego rozumowania, niż uczniowie faktycznie posiadają. Zadania często dzielą na typy, przyczem principium divisionis jest: 1-o albo zakres rzeczowy (t. zw. materyalistyczny pogląd), 2-o albo powody natury formalnej. Często też, szczególniej tam, gdzie zadania właściwie są „powyżej głów uczniów", wchodzą w grę czynniki natury sztucznej, np. zadania na tworzenie nowej jednostki i t. p. Zakres rzeczowy trudno faktycznie wyczerpać, ale idea wspomnianej zasady dzielenia na typy jest słuszna, bo zadania muszą być blizkie otoczenia ucznia i rozmaite, jak to już wspominaliśmy. Podział oparty na powodach natury formal-

nej bierze pod uwagę następstwo i związek różnych działań. Np. zadania typu: $\frac{x}{a} + b = c$. Tego rodzaju podział ma również swoje znaczenie, szczególniej tam, gdzie w grę wchodzą już wszystkie działania; np. można posługiwać się nim w roku drugim i dalej. Tak zw. dopełnianie i rozkładanie przy dodawaniu i odejmowaniu wiąże się z tem. Układanie zadań według takiego podziału musi uwzględniać następujące 2 momenty: 1^0 wyczerpanie wszelkich pytań co do danego działania, 2^0 stopniowe łączenie kilku różnych działań.

W arytmetyce początkowej zadanie ma bardzo duże znaczenie: nie służy ono tylko do zastosowania wiedzy, z niego nieraz wiedza płynie. W literaturze naszej mamy nawet podręcznik (Arytmetyka w zadaniach prof. Dicksteina), w którym stopniowo rozwijający się szereg zadań zapoznaje ucznia z własnościami liczb, uczy rachunku.

Na powyższych krótkich uwagach jednakże tutaj musimy poprzestać [1]).

[1]) Tę samą sprawę nieco obszerniej poruszyłem w n-rze 1-ym z r. b. czasopisma matematycznego p. t. „Wektor“ (wychodzi w Warszawie).

ROZDZIAŁ VIII.

Nauka ułamków stanowi nowy i odrębny pod względem swego charakteru dział arytmetyki początkowej. Ułamek jest nową formą liczby, powstaje na tle procesu uogólnienia dalszego. Ścisła teorya wprowadza ułamek zapomocą definicyi, daje szereg potrzebnych i wystarczających określeń, z których wypływa cała dalsza nauka. Czy można w nauczaniu początkowem wychodzić z definicyi chociażby w roku piątym? Odpowiedź jasna: nie można. Kto potrafi zrozumieć i przetrawić definicyę ścisłą, ten ma już główne niemal dane do tego, by mógł rozumować dedukcyjnie. Dziecko tego jeszcze nie potrafi, dla niego przedmiot nauki musi być dany konkretnie, a nie przez definicyę. Chwila zastanowienia wystarczy, aby sobie przypomnieć, jak my starsi dziwiliśmy się w pierwszych latach nauki uniwersyteckiej, gdy nam podawano nowe formy liczb lub też wprowadzano w nowe dziedziny nauki przez definicyę. Pomimo dojrzałości umysłowej wielu ludzi tak trudno się godzi z myślą, że działania, dajmy na to z liczbami ujemnemi, dane są lub wypływają z definicyi, nie są niczem „objektywnem“, co można pokazać, „dowieść“.

Poglądowe przedstawienie rzeczy, indukcyjne rozumowanie przygotowują grunt do definicyi, tembardziej że definicyi w tym dziale uniknąć nie można. Wymaga to trochy wyjaśnień. Samo przedstawienie, wyrobienie pojęcia ułamka może być zdobyte na drodze konkretnej. Tak możemy

robić już znacznie wcześniej, np. o połówce i ćwiartce można mówić jezcze w pierwszym roku, a później w miarę potrzeby rozszerzać ten zakres, nie przesadzając ani wprowadzając zbyt drobnych cząstek, jeżeli niema dobrego unaocznienia. Np. można mówić, że centymetr jest setną częścią metra, bo to się da łatwo unaocznić. Zaczynając systematyczną naukę, zbieramy i porządkujemy wiadomości zdobyte poprzednio. Nie trudno również konkretnie przedstawić dodawanie i odejmowanie ułamków, porównywanie i zmianę ich wielkości, jakkolwiek rzecz tu jest już znacznie więcej skomplikowana. Duże natomiast trudności nasuwa mnożenie i dzielenie. Zwyczajny sposób wyjaśniania, polegający na tem, że się tłomaczy, dajmy na to, mnożenie przez $\frac{3}{5}$ w ten sposób, iż liczbę $\frac{3}{5}$ uważamy za 5 razy mniejszą, niż 3, a ponieważ mnożenie przez 3 jest nam znane i zmiany iloczynu skutkiem zmian czynników również, i przez to objaśnienie jest gotowe, nie wytrzymuje krytyki naukowej. W ten sposób się zakłada, że mnożenie ułamków istnieje i te same własności posiada, co mnożenie liczb całkowitych. Byłby to nowy postulat, którego przyjęcie możnaby było wyjaśnić tylko względami natury pedagogicznej albo brakiem innego sposobu, lepszego. Ale bliższe zastanowienie wykaże nam, że jakkolwiek zachowane tu są pozory jasności, uczeń nie widzi i nie może widzieć zgodności tego objaśnienia z tem pojęciem o mnożeniu, jakie podane było w nauce liczb całkowitych. Do tego pojęcia trzeba się odwołać, wysunąć analogie i potem wprost n a z w a ć mnożeniem przez ułamek operacyę składającą się z 2 działań. Definicya tu jest potrzebna; unikanie jej nie byłoby racyonalnem już ze względów pedagogicznych. Ale ta definicya musi być przygotowana Zwrócę tu uwagę na dwa rodzaje definicyi: analityczny i syntetyczny. Jeżeli najpierw na przykładach pokazuję dany przedmiot (może to być nie konkret, lecz operacya arytmetyczna), porównywam z innymi, wskazuję na różnice i podobieństwa, szukam nici wiążących ten przedmiot z in-

nymi jednorodnymi, a potem dopiero przyczepiam do tego przedmiotu nazwę, charakteryzuję w krótkiem, zwięzłem zdaniu jego cechy istotne: to mam przed sobą definicyę analityczną. W nauce często podaje się definicye odrazu, gotowe, przyczem wspomniany proces przygotowawczy omija się, jako zbyteczny: definicyę usprawiedliwia jej ustosunkowanie z innemi ogniwami rozumowania. Taka definicya jest syntetyczna. Otóż w nauczaniu zarówno średniem, jak tembardziej niższem, podobne definicye nie mają racyi bytu. Omijanie tych procesów myślowych, jakie wywołują definicyę, byłoby szkodliwe, bo sama definicya stałaby się słowem, dźwiękiem pustym. Wszak my nie tylko podajemy wiedzę katalogową, ale uczymy myśleć. Nie samych definicyi obawiać się trzeba, ale ich podawania nieodpowiedniego, co jest dość częstym grzechem.

W ten sposób nauczanie ułamków rozpada się na 2 wyraźne działy: 1-o pojęcie ułamka, porównywanie wielkości ułamków, dodawanie i odejmowanie; 2-o mnożenie i dzielenie ułamków.

Pierwsze pytanie, jakie się tu nastręcza, dotyczy jakości środków poglądowych. Połówki, ćwiartki i t. d. różnych przedmiotów mogą być wyzyskiwane w pierwszych latach nauki, ale przy systematyczniejszem przechodzeniu są prawie zawsze niewygodne, gdyż trudno się dają nagiąć do illustracyi różnych pytań, jakie się tu nasuwają. Potrzebny jest taki środek poglądowy, aby np. skracanie ułamka, dodawanie, porównywanie wielkości mogło być łatwiej unaocznione. Różne przyrządy mechaniczne często są bardzo skomplikowane i rzadko mogą służyć do większej liczby ułamków, a przytem nieraz bywają dość kosztowne przy fikcyjnej wartości. Środek poglądowy musi być prosty i, że tak powiem, giętki, aby uczeń mógł się sam nim posługiwać, nawet na zawołanie. Takim sposobem jest odcinek prostej, narysowany na papierze kratkowanym. Można mu zarzucić, że jest jednostronny, ale gdy zwrócimy uwagę, iż pojęcie połowy i t. d. wyodrębniło się już, że połowa tu nie zależy od danego konkretu, uczeń zda sobie z łatwością sprawę z tego,

o co tu chodzi. Porządkując poprzednie wiadomości, nauczyciel powinien dawać szereg przykładów konkretnych, gdzie wchodzą części całości, aby tak samo, jak na początku, przy pierwszych liczbach, uczniowie jasno zdawali sobie sprawę, że tu mają do czynienia z czemś, co nie zależy od tego lub innego przedmiotu.

Nie będę tu wyjaśniał na przykładach, w jaki sposób mamy z odcinkiem operować. Jest to rzecz tak prosta, że uczący sam to sobie obmyślić może. Można jednocześnie stosować pojęcie pola, używając prostokąta, pojęcie objętości — stosując prostopadłościan. Naturalnie, rzeczy te muszą być przed oczami klasy. Po przerobieniu dostatecznem każdego szczegółu, np. sprawy mnożenia lub dzielenia licznika i mianownika przez jedną, tę samą liczbę, nauczyciel formułuje odpowiednie prawo, i dobrze jest, gdy uczniowie prawo to zapisują w kajetach.

Nie zapominajmy, że tu nauka idzie w tempie szybszem, że tylko rok czasu na dobre mamy, ale też uczniowie nasi są już więcej umysłowo rozwinięci. Gruntowność tu, jak wszędzie, jest ważna.

Przy dodawaniu i odejmowaniu potrzebna jest umiejętność sprowadzania do wspólnego mianownika. Zwykle odrazu poprzedza się naukę ułamków rozdziałem o podzielności liczb, największym wspólnym dzielniku i najmniejszej wielokrotnej. Czy taki sposób postępowania jest uzasadniony? Mojem zdaniem, nie. Nauka tem więcej interesuje ucznia, im jaśniej zdaje on sobie sprawę zarówno z jej wartości praktycznej, jak wogóle celowości w powiązaniu oddzielnych działów. Znaczenie podzielności liczb odczuwać i rozumieć może już bardzo wcześnie, dlatego też, jak wspomnieliśmy wyżej, pożądaną jest rzeczą o cechach podzielności nadmieniać nawet w roku drugim, czysto indukcyjnie, na tle obserwacyi; schemat natomiast rozkładania na czynniki, znajdowanie wielokrotnych i dzielników wspólnych ma charakter więcej teoretyczny: uczeń nie rozumie, do czego mu się to przyda, bo potrzeby intelektualne są jeszcze mało rozwinięte, mało go obchodzi samo zagadnienie. Z drugiej strony,

wczesne, przed ułamkami, wprowadzenie algorytmów wynajdywania największego dzielnika i najmniejszej wielokrotności osłabia inwencyę, potrzebę rachunku pamięciowego, a nieraz się zdarza, że wobec małych mianowników przy dodawaniu i odejmowaniu ułamków uczeń stawia znane kreski i prowadzi mechaniczne rozkładanie. Nauka dodawania i odejmowania ułamków winna też być podzielona na dwie części: 1-o dodawanie i odejmowanie na tle rachunku pamięciowego i inwencyi i 2-o dodawanie i odejmowanie przy pomocy algorytmów wynajdywania największego wspólnego dzielnika i wspólnej wielokrotnej. Dobrze jest powiązać najmniejszą wspólną wielokrotną z największym dzielnikiem na zasadzie równości

$$W = D \cdot r_1 \cdot r_2,$$

gdzie W jest najmniejsza ogólna wielokrotna, D—największy wspólny dzielnik, a r_1 i r_2 ilorazy z podzielenia danych liczb przez największy wspólny dzielnik. Takie powiązanie ma swoje znaczenie, gdyż zarówno ułatwić może rachunek, jak głębiej podkreśla różnice obu pojęć.

W taki sposób prowadzone dodawanie i odejmowanie daje dobre rezultaty, co można przewidzieć. Pewien nauczyciel fizyki nie żałował nieraz czasu na wykonywanie dokładniejsze doświadczenia więcej złożonego. Przy takiem doświadczeniu (które oczywiście nie zastąpi własnoręcznego) uczeń przez dłuższy czas przypatruje się wszystkim fazom zjawiska, myśli przytem, a nauczyciel od czasu do czasu wstawia jędrną uwagę i zadaje pytania, które myśl tę koncentrują i formułują niejako. Otóż ten sam proces mamy tutaj. Potykając się i robiąc na razie omyłki, uczeń szuka mianownika wspólnego dla danych dwóch (lub więcej) ułamków niedużych. Pracuje cała klasa, nauczyciel poprawia rezultaty i odpowiedzi. Po pewnym czasie mamy już niezłą wprawę; lecz jasno bardzo można przedstawić sobie, że taki sposób nie wystarcza, należy szukać ogólniejszego i lepszego dla wszelkich ułamków. Otóż tu jest miejsce na schematy i na znajdowanie największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wielo-

krotnej. Nie można pomijać również sposobu kolejnego dzielenia. Ważne to jest dla ułamków samych, ma również znaczenie dla późniejszych działów matematyki szkolnej.

Przy nauczaniu mnożenia i dzielenia ułamków wychodzimy ze znanych przedtem uczniom zadań: znajdowania części całości i odwrotnego. Przytem dajemy przykłady np. takie: funt masła kosztuje 45 kop., ile kosztuje $\frac{2}{3}$ funta? i t. p. Od znajdowania części, wyrażonej ułamkiem właściwym, przechodzimy do tych samych zadań, gdzie część odpowiednia jest ułamkiem niewłaściwym, np. w poprzedniem zadaniu zapytać: ile kosztuje $2\frac{1}{2}$ funta? Konstatujemy fakt, że w podobnych zadaniach, tak jak w znajdowaniu części całości, mnożymy całość przez licznik i dzielimy przez mianownik ułamka, wyrażającego daną część. Obok stawiamy takie same zadania, gdzie wchodzą liczby całkowite. Uprzednio uczniów powinno się obeznać z faktem, że każdą liczbę całkowitą można przedstawić w postaci ułamka o dowolnym mianowniku. Jeżeli koń przebiega na minutę 90 m., to w 5 przebiegnie 450 m., w $\frac{2}{3}$ min. — 60 m. i t. d., ale 5 min. $= \frac{15}{3}$ min., więc gdybyśmy ułamka $\frac{15}{3}$ nie skracali, a zadali sobie pytanie podobne do poprzednich, musielibyśmy 450 m. podzielić przez 3 i pomnożyć rezultat przez 15. Otrzymana liczba jest ta sama, jak w tym przypadku, gdy wprost mnożymy przez 5. Mnożenie przez 5 jest tem samem, co znajdowanie $\frac{15}{3}$ całości. Kilka podobnych przykładów ugruntowuje analogię i nauczyciel natychmiast wyprowadza z niej wniosek, że znajdowanie części całości może być również nazwane mnożeniem przez ułamek. Następuje dalej sformułowanie: aby pomnożyć przez ułamek, należy pomnożyć przez jego licznik, a podzielić przez mianownik. Jeżeli przed tym przypadkiem uczniowie zapoznali się z mnożeniem ułamków przez liczby całkowite, co wyprowadza się na zasadzie zna-

nych im już własności dodawania i zmiany wielkości ułamka (np. $\frac{2}{3} \times 5 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2+2+2+2+2}{3} =$

$= \frac{5 \times 2}{3}$, z czego wysnuwa się wniosek, że pomnożyć ułamek przez 5 znaczy to samo, co 5 razy jego licznik zwiększyć i t. p.), to mnożenie ułamków nie przedstawia już trudności. W ten sposób tam, gdzie poprzednie pojęcia mnożenia i dzielenia mogą mieć zastosowanie, korzystamy z nich. Dzielenie przez liczbę całkowitą interpretujemy, jak przy liczbach całkowitych, jako działanie odwrotne do mnożenia. Jeżeli pomnożenie przez 5 ułamka jest tem samem, co zwiększenie go 5 razy, to podzielenie odpowiada zmniejszeniu 5 razy. Czytelnik widzi, że tutaj o mieszczeniu nie może być mowy, jakkolwiek później przy dzieleniu ułamków, dla zupełnego poparcia analogii, możemy, używając do pomocy dodawania i odejmowania, pojęcie to również zużytkować. Jeszcze wcześniej uczymy zapisywać rezultaty dzielenia liczb całkowitych w przypadku, gdy jest reszta, w postaci ułamka (zamiana ułamka mieszanego na zwyczajny i odwrotnie).

Można również po takiem omówieniu i przedstawieniu rzeczy dać nowe określenie mnożenia, według którego z mnożnej tworzymy iloczyn tak, jak mnożnik jest utworzony z 1. Takie określenie, dane na początku, z różnych względów byłoby nieodpowiedniem, przeczyłoby temu, co powiedzieliśmy wyżej o definiowaniu.

W nauce ułamków dziesiętnych dotąd jeszcze po podręcznikach i w praktyce nauczania duże znaczenie przypisuje się ułamkom okresowym. Musimy tu parę słów im poświęcić. Zamiana ułamku okresowego na zwyczajny jest sumowaniem postępu geometrycznego nieskończenie malejącego, o którym mowa w klasie 6-ej szkoły średniej. Tu spotykamy niejedną trudność przy ścisłem przedstawieniu tej rzeczy. W arytmetyce początkowej ten dział roi się wprost od błędów naukowych. Weźmy np. takie przedstawienie tej rzeczy. Konstatujemy przez dzielenie, że:

$$\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots$$

$$\frac{1}{99} = 0{,}0101\ldots$$

$$\frac{1}{999} = 0{,}001001\ldots$$

Naturalnie, natychmiast uogólniamy, iż

$$\frac{1}{10^n - 1} = \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + \ldots$$

Następnie, zwróciwszy uwagę, że mnożąc obydwie strony każdej z poprzednich równości przez pewną liczbę całkowitą, możemy otrzymać np.:

$$\frac{5}{9} = 0{,}555\ldots$$

$$\frac{7}{99} = 0{,}0707\ldots$$

$$\frac{34}{99} = 0{,}3434\ldots \quad \text{i t. d.},$$

wyprowadzamy stąd prawidło zamiany ułamka okresowego prostego na zwyczajny. Później, dzięki niewielkiej modyfikacyi, możemy to samo zrobić dla mieszanego. Powyższe uogólnienie zgadza się z zasadą indukcyjnego rozumowania, nie nasuwa więc zarzutów; ale mnożenie obu stron przez liczbę tę samą nie może być dopuszczane. Mamy tu do czynienia z szeregiem nieskończonym i trzeba wykazać najpierw możliwość takiego mnożenia. Można rozumować inaczej, stosując dalej dzielenie, np. przekonać się, że powyższa równość słuszna będzie dla ilorazu $\frac{5}{9}$ i t. d., a później znowu uogólnić. Byłoby to rozumowanie poprawniejsze, ale również nie wolne od zarzutów, nigdy bowiem nie można być pewnym odwrotnego twierdzenia, a tem samem wykazać, czy suma tego samego szeregu nieskończonego nie może się „równać“ różnym ułamkom zwyczajnym*). Można teraz posta-

*) W listopad. zeszycie z r. b. lwowskiego czasopisma pedagogicznego „Muzeum“ czytelnik może znaleźć w omawianej materyi artykuł prof. Hoborskiego, w którym rzecz ta traktowana jest zgodnie z bronioną w tej książeczce zasadą indukcyi.

wić zapytanie, czy jest wogóle potrzebna przy nauce początkowej zamiana ułamka okresowego na zwyczajny. Praktycznej potrzeby niema, gdyż tylko w podręcznikach dawane są przykłady na taką zamianę, w praktyce tego nie spotykamy; teoretyczna również istnieć nie może, bo cała nauka początkowa nie jest teoryą arytmetyki. Należy zwrócić uwagę przy nauczaniu na następne rzeczy: 1-o wykazać możliwość i istnienie ilorazów w postaci ułamka okresowego, 2-o tam, gdzie tego rodzaju iloraz się trafi, przechodzić do rachunku z ułamkami zwyczajnemi albo wprowadzić pojęcie przybliżeń. To ostatnie ma wielkie znaczenie praktyczne i żałować należy, że dotąd sprawa ta nie znajduje większego zastosowania.

Należyta wprawa rachunkowa, umiejętność w rozwiązywaniu zadań, jak również oryentowanie się w działaniach i ich własnościach, są powodem dostatecznym, aby nauczyciel mógł przystąpić do nowego działu bardzo ważnego: do nauki o stosunku, czyli do najogólniejszej formy liczby wymiernej. Przez naukę ułamków dokonano jednego z pierwszych uogólnień,—rozszerzenia pojęcia liczby, dzięki czemu zakres stosowania staje się szerszym i mogą się nasunąć takie zagadnienia, które z samą liczbą całkowitą nie mogły być należycie rozpatrywane. Zjawiska w świecie otaczającym nigdy nie występują same, oddzielnie, niezależnie od innych, zawsze natomiast są w związku ze sobą. Poznanie takiego związku jest bardzo ważnem zagadnieniem nie tylko teoretycznem, ale i praktycznem. Jednym z elementarnych takich związków jest proporcyonalność. Pojęcie stosunku ściśle się z nią wiąże. Jeżeli mamy dwie jakieś wielkości A i B, znajdujące się w zależności proporcyonalnej, to charakterystycznem dla nich jest, że albo iloraz $\frac{A}{B}$, albo iloczyn AB jest wielkością stałą. Rzecz jasna, że o tem może być mowa tylko wtedy, gdy zapomocą liczby możemy uchwycić nie tylko oddzielne wartości tych wielkości, ale jakby całe ciągi o dowolnie małej różnicy sąsiednich elementów. Stawiam teraz

pytanie dla całego tego działu zasadnicze: czy pojęcie stosunku należy wprowadzać formalnie, teoretycznie, jak to zwykle dotąd się robi, czy też na tle przykładów konkretnych wielkości proporcyonalnych? Umysł więcej rozwinięty zdaje sobie sprawę łatwo z formalnej treści pojęcia stosunku, ale umysł ucznia nie rozumie, do czego służą wszelkie podobne uwagi, tembardziej że sprawa wcale nie wydaje mu się o wiele różną od zwyczajnego dzielenia. Z drugiej strony, każde nowe pojęcie, każdy nowy moment nauki wtedy mocno ugruntować się może w myśli dziecinnej, gdy wychodzić będziemy z przykładów konkretnych, z danych realnych, na których namacalnie przekonać się można o jego pożytku i celowości. Jest to bezpośredni wniosek z tych wszystkich myśli poprzednich, jakim służy niniejsza książeczka.

Rozważamy najpierw szereg przykładów konkretnych, w których wchodzą 2 wielkości proporcyonalne, np. czas i droga przebieżona, ilość towaru i cena i t. p. Wypisujemy dwa ciągi odpowiadających sobie wartości liczebnych tych wielkości. Z wielką łatwością uczniowie sami, korzystając tylko ze znanych sobie pojęć, mogą w tych ciągach wykonywać intrapolacyę i ekstrapolacyę, t. j. mogą wstawiać pomiędzy dwie już znalezione wartości nową, pośrednią i takie ciągi wspomniane przedłużać. To pierwszy stopień. Dalej następuje bliższa analiza tych ciągów i odkrycie stałości ilorazów oraz równości tychże w odpowiednich wyrazach obu ciągów. Więc, gdy np. a_1 i a_2 są elementami sąsiednimi jednego ciągu, a b_1 i b_2 — drugiego, to $\frac{a_1}{b_1} = \text{const}$ i $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ i t. d. Ponieważ wartości wspomnianych wielkości mogą być wyrażone przez wszelką liczbę znaną, bierzemy pod uwagę ilorazy wszelkich liczb znanych. Przy sprawdzaniu stałości tych ilorazów potrzebne jest wykonanie dzielenia, uproszczenie ilorazu, zastosowanie ogólne prawa o zmianie licznika i mianownika bez zmiany wielkości ułamka. Następnie podnosimy pytanie konkretne, co znaczy dany iloraz stały. Znaczy on np. to, co nazywamy szybkością lub ceną jednostki

towaru i t. p. Uczeń nabiera przekonania, że taki iloraz ma wartość konkretną. Tam, gdzie można się posługiwać pojęciami geometrycznemi (o czem, niestety, w niniejszej książeczce nie będzie mowy), dobrze jest stosować grafikę prostej, jak to robią autorowie angielscy. W różnych przykładach konkretnych iloraz wspomniany ma równą wartość konkretną; otóż miejsce jest teraz do tego, by nazwać ten iloraz stosunkiem, by pojęcie to wprowadzić (razem również z nazwami elementów stosunku). Tu pojęciu może odpowiadać dokładne określenie. Czytelnik widzi, że jakkolwiek usiłujemy wytworzyć „pojęcie liczby" w pierwszym roku i dalszych, nie dajemy tam definicyi liczby. Wskazuje to na pewne bardzo ważne cechy charakterystyczne tej rzeczy, nad któremi tu rozwodzić się nie będziemy.

Pojęcie stosunku dość trudno wchodzi do umysłu dzieci, a dlatego właśnie należy na nie zwrócić baczniejszą uwagę. Stosunek geometryczny (o nim zaś tu mówimy tylko) dwóch wielkości określają zwykle jako liczbę, która wskazuje, ile razy jedna wielkość jest większa lub mniejsza, niż druga. Słowa te: „ile razy" wskazują jakby na liczbę całkowitą, uczeń do tego się przyzwyczaił, a tymczasem stosunek może być ułamkiem. Tu tkwi niemały brak w wyrażeniu się, a usunięcie jego może mieć również niemały pożytek. Ściślej mówiąc, można dać takie określenie stosunku: „stosunkiem dwóch liczb (a więc odpowiadających im wielkości) a i b nazywamy taką trzecią liczbę c, że iloczyn $bc = a$". Jestem zdania, że tak powinien być określany stosunek w szkole, gdyż zgodnie z tem, co powiedziałem wyżej, nie boję się oznaczeń literowych, owszem uważam je za potrzebne, za uwieńczenie procesu indukcyjnego rozumowania i przejście naturalne do dedukcyi.

Dalej nauczyciel usiłuje pogłębić pojęcie zależności proporcyonalnej: obok prostej stawia odwrotną. Najgłówniejszą rolę odgrywają dobre przykłady i należyte ich wyzyskanie. Do takich przykładów można zaliczyć zależność między wymiarami prostokąta przy danem polu, zależność pomiędzy długością ramienia wagi i obciążeniem przy danym momen-

cie, jak zwykle, liczbę robotników i czas przy danej pracy i t. p. Układanie 2 ciągów (tabliczek) znów jest pożyteczne; nauczyciel nie tylko sam je układa, ale również uczniowie i przytem nie tylko na zadany przykład, ale również taki, który przez nich był obrany. Tu znowu zwracamy uwagę na równość odpowiednich stosunków odwrotnych. Przeciwstawienie zależności proporcyonalnej innej jakiejkolwiek zależności jest pożyteczne, zaznacza wyraźniej główne cechy pojęcia. Na takie rzeczy czasu żałować nie trzeba, bo to są rzeczy podstawowe. Określenie zależności proporcyonalnej także zasługuje na uwagę. Tutaj również w praktyce nauczania nie wszystko jest w porządku. Jeżeli wyjaśnienie charakteru tych pojęć było dostateczne i poparte konkretnymi przykładami, można dawać następujące określenie: „dwie wielkości A i B są wprost proporcyonalne, jeżeli stosunek $\frac{A}{B}$ zawsze jest stały, a odwrotnie proporcyonalne, jeżeli iloczyn AB zawsze jest stały".

Sprawa ugruntowania pojęcia zależności proporcyonalnej wiąże się z t. zw. regułami. Każdy nauczyciel żywszy odczuwa, że w tej sprawie są wielkie braki, że trzeba coś naprawić, a jednakże konserwatyzm staje na przeszkodzie, wydawać się bowiem niejednokrotnie może, że ta lub inna forma przedstawienia rzeczy stanowi jakby integralną część samej nauki, usprawiedliwiona jest wewnętrznie na tle jej zasad. W tej dziedzinie, jak w wielu innych, początkowego nauczania arytmetyki tak nie jest: nie istota rzeczy ani potrzeby samej nauki lub życia praktycznego mają prawo głosu często decydującego, lecz historycznie wytworzone formy nauczania, formy skostniałe w praktyce szkolnej. Tak zwane reguły powstały kilka wieków temu dla zadośćuczynienia realnym zagadnieniom, jakie stawiała przedewszystkiem praktyka handlowa. Trzeba było stale rozwiązywać określone zagadnienia, i oto wytworzono pewien schemat tego rozwiązywania, pewną regułę. Dawniej takie reguły były na porządku dziennym w różnych dziedzinach matematyki (np. t. zw. reguła falsi. duorum falsorum i t. p.). Praktyka życia w dobie obecnej

wyprzedza te rzeczy, stwarzając nowe sposoby, nowe metody. Gdyby owe reguły zawierały jakąś ważną treść naukową, jakiś pierwiastek kształcący, możnaby się z tem jeszcze pogodzić; ale tego niema. Wszak zadania z nieistniejących stosunków handlowych nie można chyba zaliczyć do teoryi. Powstając przeciwko regułom, nie chcę razem z wodą wyrzucać z wanny dziecka, są bowiem zagadnienia realne, którym reguły odpowiadają; ale te zagadnienia należy poruszać w szkole inaczej. Nie o schemat rozwiązania powinno się dbać głównie, lecz o te pojęcia, z których ten schemat wypływa. W tej dziedzinie wskazane są następujące postulaty: 1-o sposoby rozwiązywania zadań z praktyki handlowej muszą być traktowane w szkole tak, jak w tej praktyce; 2-o główną uwagę należy zwrócić na ugruntowanie pojęć stosunku i zależności proporcyonalnej, omijając w miarę możności sztuczne podziały na różne reguły; 3-o przy rozwiązywaniu tych zagadnień używanie proporcyi nie jest konieczne, tembardziej że skutkiem złego nauczania to używanie może być szkodliwe.

Zrozumiałą jest rzeczą, że uczeń klasy niższej nie jest w stanie ani interesować się, ani nawet zrozumieć pewnych sposobów postępowania w praktyce handlowej, nie zdaje sobie sprawy z komplikacyi różnych czynników, jakie na to postępowanie wpływają; ale te elementarne rzeczy, które są już przedmiotem nauczania, traktowane być powinny tak, jak to się faktycznie robi. Zadanie z życia praktycznego ma wtedy wartość, gdy je rozwiązujemy sposobem używanym w tem życiu, inaczej jest to tylko złuda nauki i tracenie czasu. Wiele zadań uprawianych obecnie zniknie, jak np. typowo scholastyczne zadania na wszelkie odmiany obliczania procentów, dyskonta i t. p., takie odmiany, jakich życie nigdy nie wysuwa. Czas pozostały można obrócić na wprawę rachunkową, na zadania z innych dziedzin, gdzie pojęcie proporcyonalności ma zastosowanie. Główne różnice pomiędzy szkolnym sposobem rozwiązywania a faktycznie używanym w praktyce dotyczą obliczeń procentowych, dyskonta i zamiany monet. O stałym mnożniku np. nigdzie prawie

w nauczaniu szkolnem niema wzmianki, a zadania są tak dobrane w podręczniku, że wszystko dobrze wypada. Uczeń przyzwyczaja się do „ładnych“ odpowiedzi, które są dla niego jakby sprawdzianem udatnego rozwiązania. W praktyce życiowej takie odpowiedzi wypadają dość rzadko i potrzebne jest formułowanie przybliżone rezultatu. O tem trzeba pamiętać. Naturalnie, praktyka handlowa opiera się prócz ścisłego rachunku jeszcze na pewnych konwencyach w rodzaju t. zw. dyskonta handlowego; ale z punktu widzenia teoretycznego zarówno handlowe, jak t. zw. matematyczne dyskonto podlegają zarzutom. Porównanie obu sposobów ma znaczenie dla uwypuklenia ich różnic i znaczenia każdego.

Jeżeli sposób proporcyi stosowany jest ryczałtowo bez odpowiedniego przygotowania i zrozumienia potrzeby, chybi celu i jest tylko schematem do nauczenia się. Omawiany dział nauczania początkowego arytmetyki nacechowany jest w praktyce tym schematyzmem więcej, niż każdy inny, a wszystko, co prowadzi do osłabienia takiego stanu rzeczy, jest pożądane, tembardziej że sposób proporcyi nie jest konieczny *). Sposób sprowadzania do jedności ma wszelkie zalety świadomego rachunku. Czasem może się tu zdarzyć dość komiczny przypadek (dla ucznia), że dajmy na to np. jakąś jednostkę pracy wykona w określonym czasie aż $\frac{1}{3}$ robotnika. Nie może to być zarzutem, ale nie zawsze dla nauczyciela łatwo z takiej sytuacyi wyjść i wytłomaczyć uczniom, o co tu chodzi.

Z definicyi stosunku wypada sposób znajdowania poprzednika lub następnika w innym stosunku mu równym, jeżeli ten poprzednik lub następnik nie są wiadome. Jeżeli bowiem $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$, to $x = a \cdot \frac{b}{c}$, a gdy $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$,

*) Metodyk niemiecki Stern, uczeń Pestalozzego, w dziele p. t. Lehrgang des Rechenunterrichts (1832) proponuje usunąć sposób proporcyi i zastąpić go całkowicie sprowadzaniem do jedności. U nas prof. Dickstein w książce swej „Arytmetyka w zadaniach“ wprowadza pojęcia mnożenia i dzielenia przez stosunek.

to $x = a : \frac{b}{c}$. Ten formalny sposób rozwiązywania nie może być jednakże odrazu stosowany: należy zacząć od przykładów konkretnych, tak, jak to robimy zwykle. Wypiszmy taką tabliczkę cen różnych ilości cukru:

℔	Kp.
1	16
$^3/_2$	24
2	32
$2^1/_2$	40

Z tej tabliczki natychmiast widocznem jest, że 1-o $\frac{16}{1} = \frac{24}{^3/_2} = \frac{32}{2} = \frac{40}{2^1/_2}$ i t. d., a 2-o, że $\frac{^3/_2}{2} = \frac{24}{32}$. Przypuśćmy, że mamy dane zadanie: Dwa funty cukru kosztują 32 kop. Ile kosztuje $1^1/_2$ f.? Wypisujemy dane w postaci tabliczki:

2	32
$^3/_2$	x

przyczem niewiadomą cenę możemy oznaczyć przez x. Stosunek $\frac{32}{2}$ wskazuje cenę jednostki towaru, więc $x = \frac{3}{2} \cdot \frac{32}{2} = 24$. Inaczej mówiąc, pomnożyliśmy cenę przez liczbę funtów. To samo zadanie można zrobić inaczej, biorąc pod uwagę równość stosunków $\frac{x}{32} = \frac{^3/_2}{2}$. Znajdujemy najpierw wartość tego ostatniego stosunku $\frac{3}{4}$, a następnie powołujemy się na definicyę stosunku i powiadamy: poprzednik x równa się następnikowi pomnożonemu przez wartość stosunku: $x = 32 \cdot \frac{3}{4}$. Rzecz jasna, że później to uproszczenie stosunku nie jest potrzebne i można odrazu pisać:

$x = 32 \frac{3/2}{2}$, a uproszczenia wykonywać później. Pierwszy sposób jest używanem zwykle sprowadzaniem do jedności i tak samo, jak drugi, jest właściwie mnożeniem przez stosunek. To ostatnie przypomina zadanie o znajdowaniu części danej całości. Przy zależności odwrotnie proporcyonalnej korzystamy w pierwszym ze stałości iloczynu (co nie przeszkadza rozumować również tak, jak to się zwykle robi), a w drugim występuje dzielenie przez stosunek (znajdowanie całości z danej części).

Weźmy jeszcze parę zadań.

Lotnik w 1,5 g. przelatuje $157\,^1/_2$ km. W ile godzin przeleci 210 km.?

Zależność wprost proporcyonalna. Stosunek żądanej liczby godzin do 1,5 g. jest taki sam, jak stosunek $210 : 157\frac{1}{2} =$ $= 4 : 3$, a więc $x = 1{,}5 \cdot \frac{4}{3} = 2$ (g.).

Pociąg osobowy biegnie od jednej stacyi do drugiej z szybkością 45 km. na godzinę i przebiega odległość pomiędzy stacyami w ciągu $\frac{2}{3}$ godz. W jakim czasie tę samą odległość przebiegnie pociąg towarowy, który porusza się z szybkością 30 km. na godzinę?

Zależność odwrotnie proporcyonalna; stosunek żądanej wielkości do $\frac{2}{3}$ g. jest równy odwrotnemu stosunkowi liczb 30 i 45, a więc $x = \frac{2}{3} \times \frac{45}{30}$ lub $\frac{2}{3} : \frac{30}{45}$. Można też inaczej rozumować. Iloczyn $45 \cdot \frac{2}{3} = x \cdot 30$, czyli $30\,x = 30$, a więc $x = 1$.

Czterech zecerów w ciągu 3 dni składa 50 stronic książki. W ile dni 6 zecerów jest w stanie złożyć 40 str. tejże książki?

Gdyby w obu przypadkach ilość pracy wykonanej (w danym razie 50 str.) była ta sama, mielibyśmy zadanie znane poprzednio. Zależność odwrotnie proporcyonalna. Liczba dni

wynosiłaby: $3 . \frac{4}{6}$. Lecz liczba stronic nie jest ta sama i dlatego liczba dni zmienić się musi. Zależność wprost proporcyonalna. Liczba dni — $x = 3 . \frac{4}{6} . \frac{40}{50} = 1,6$.

Z tych przykładów widoczne jest, jak rozwiązywać można zadania podobne, jeżeli nie posługujemy się sposobem sprowadzania do jedności i proporcyi. Tych ostatnich pomimo to nie myślimy poddawać ostracyzmowi: wszak znajdą one swoje zastosowanie w geometryi. Tam, gdzie nauka arytmetyki początkowej wiąże się ściśle z geometryą propedeutyczną, sposób proporcyi może być stosowany z pożytkiem, jak to robią autorowie angielscy.

Gdy uczniowie zdobędą należytą wprawę w robieniu zadań i gdy nauczyciel ma pewność, że istota rzeczy jest zrozumiana, można wskazać na schemat zwyczajnie używany, który szczególnie przy złożonych zadaniach prędko prowadzi do celu.

Często proporcyi „dla jednolitości“ w wykładzie używają tam, gdzie można się obejść wiadomościami zdobytemi przy nauce ułamków. Takie zadania spotykamy np. przy podziale danej liczby na części proporcyonalne do szeregu innych, gdy np. w danych zadania powiedziano, że dajmy na to część pierwsza stanowi $\frac{2}{5}$ II, a $\frac{3}{4}$ III równe są $\frac{5}{7}$ II i t. p. Podobne rozwiązanie jest przedewszystkiem sztuczne i uczeń musi je... spamiętać, aby później zapomnieć i przestać wierzyć w logiczne władze swego umysłu. Nauka myśli wytężonej, skupionej uwagi i wyrazicielka wewnętrznej mocy ducha ludzkiego staje się nieraz dzięki temu i innym podobnym metodom scholastycznym narzędziem zabijania myśli, a nauczyciel „wielogodzinowy“ idzie utartą ścieżką, na której ani radość oglądania owoców swej pracy go nie czeka, ani tężyzna duchowa dzieci nie rośnie.

Wskazówki bibliograficzne.

Na zakończenie przytaczam garść wiadomości bibliograficznych. Nie jest moim zamiarem przytem uwzględnienie strony historycznej rzeczy, pragnę tylko podać źródła, które mogą być, zdaniem mojem, pożyteczne przy nauczaniu. Na czele muszę postawić artykuł p. t. „Arytmetyka“ W. Trybulskiego, znajdujący się w zeszytach 5-ym i 6-ym pierwszego tomu Encyklopedyi Wychowawczej. W artykule tym, gruntownym i stanowiącym jedną z najwybitniejszych naszych prac w tej dziedzinie, czytelnik może znaleźć dokładniejszy rys historyczny rozwoju arytmetyki wogóle, jak również w Polsce (wyliczono do r. 1879, t. j. daty, w której był napisany artykuł, wszystkie dzieła z tej dziedziny zasługujące na uwagę, jakie u nas wyszły). Poza tem autor zajmuje się zagadnieniami nauczania, a jakkolwiek nie zawsze można się z jego poglądami zgodzić (np. pogląd na metodę Pestalozzego, która obecnie w odmiennem przedstawia się świetle), artykuł ma znaczenie zasadnicze i żaden nauczyciel arytmetyki ominąć go nie powinien.

Pokrótce uzupełnia dane historyczne, w poprzednim artykule umieszczone, artykuł S. Dicksteina p. t. „Matematyka“ (Encyklopedya Wychowawcza, t. VII, zesz. IV). Autor wspomina tu o niektórych nowszych pracach z dziedziny

metodyki arytmetyki, które ukazały się w Niemczech po znanej u nas z przeróbek polskich książce Grubego.

Sprawą nauczania arytmetyki po r. 1879 zajmowały się u nas czasopisma pedagogiczne. Nie będę tu wyliczał wszelkich przyczynków, nadmienię tylko o niektórych. W Przeglądzie Pedagogicznym ukazał się w r. 1882 szereg artykulików A. Jurgielewicza (str. 379, 441, 478, 601, 625, 714). Artykuły te, niestety, nie dowodzą gruntowniejszego opanowania przedmiotu i mają większe znaczenie raczej dla nauczania domowego. Autor niezupełnie zdaje sobie sprawę nawet z zalet metody Grubego, którą jeszcze przed nim spopularyzował A. Jeske w cytowanem w tekscie dziełku. Praca obejmuje jednakże pewną całość pierwszych początków w formie praktycznych lekcyi. W temże piśmie ukazała się w roku 1886 cytowana wyżej wartościowa praca p. t. „Lekcya o stosunkach i proporcyonalnosci" S. Dicksteina, a w r. 1905 p. t. „Uwagi nad programem matematyki w szkole średniej" (nr. 14—15, str. 189 — 193) znajduje się streszczenie narad członków nowopowstałego „Koła matematyczno-fizycznego" w Warszawie. Mamy tu krótki program i ogólne bardzo wskazówki metodyczne. Rzecz dotyczy głównie szkoly średniej.

W czasopiśmie lwowskiem „Szkoła" w dodatku p. t. „Praktyka szkolna" często ukazywały się i ukazują przyczynki do nauczania pierwszych początków, które nas tu najwięcej obchodzą, jak również znaleźć można streszczenie nowszych prac niemieckich (kierunek eksperymentalny).

Prócz wspomnianych w tekscie „krótkich wskazówek" St. Jankowskiego i „Metodyki" Traczyńskiego, doczekała się kilku wydań książeczka St. Thomasa p. t. „Jak prowadzić naukę arytmetyki" (wyd. 2-e 1906). Wspomniane dziełka nie grzeszą postępem w porównaniu z 2-em chociażby wydaniem „Arytmetyki" Jeskego. Pomimo to znaleźć w nich można niejedną uwagę praktyczną, wartościową w nauczaniu szkolnem i domowem.

Po roku 1879-ym ukazała się u nas, szczególniej w ostatnich latach, znaczna liczba zbiorów zadań i podręczników,

przeważnie pisanych tylko przez praktyków i grzeszących nieraz nie tylko przeciw ustalonym już zasadom metodyki, ale i nauki.

Do wybitniejszych podręczników należą: M. Berkmana „Początki arytmetyki", S. Dicksteina „Arytmetyka w zadaniach", H. Stattlerówny „Początkowa nauka arytmetyki", A. Rudnickiej „Zbiór zadań arytmetycznych" (z krótkiemi wskazówkami metodycznemi). „Arytmetyka w zadaniach" S. Dicksteina jest oparta na tej zasadzie metodycznej, jak to wspomnieliśmy, że zadanie powinno zajmować centralne miejsce w wykładzie, a metodyczny układ zadań jest w stanie zastąpić niepotrzebną „teoryę". W podręczniku uwzględniono głębiej stronę logiczną przedmiotu. W książkach H. Stattlerówny i A. Rudnickiej (2 pierwsze lata nauczania) wprowadzono świadomie i obszerniej pojęcia geometryczne, jakkolwiek w zasadniczych momentach podręczniki te nie odbiegają od poziomu Jeskego.

Z książek cieszących się pomimo wszystko powodzeniem praktycznem należy wspomnieć zbiory zadań St. Thomasa i Bohuszewicza. Głównie część druga (ułamki) wspomnianego podręcznika S. Dicksteina cieszy się również dość znacznem powodzeniem. Podręcznik Bohuszewicza, nie wyróżniając się przemyślaną metodą układu, jest przepełniony błędami drukarskimi i nie przynosi zaszczytu naszym wydawnictwom tego rodzaju. Wogóle na dobry zbiór zadań, obejmujący całość arytmetyki początkowej, czekamy jeszcze. W nauczaniu elementarnem cieszy się powodzeniem „Zbiór zadań arytmetycznych" St. Jankowskiego, przystępny w cenie i trochę lepszy od innych tego rodzaju podręczników.

Z dzieł traktujących o całości zwykłej arytmetyki praktycznej i pożytecznych dla uczącego wymienić należy: „Arytmetykę (większą)" M. Baranieckiego.

Do zapoznania się z metodami arytmetyki handlowej można polecić „Arytmetykę handlową" S. Kramsztyka, a z głębszem ujęciem podstaw nauki, cytowane w tekscie dzieło prof. S. Zaremby.

Z dzieł obcych dotyczących metodyki nauczania godne są między innemi przestudyowania następujące książki:

J. Stöcklin: „Schweizerisches Kopfrechenbuch und Methodik des Rechenunterrichts", 3 części, Liestal (w Szwajcaryi). Pierwsza część obecnie wyszła w wydaniu 3-em (1910). Książka jako praktyczny przewodnik bardzo dobra. Wskazówki szczegółowe, drobiazgowe nawet, obejmują całość początkowej arytmetyki wraz z geometryą propedeutyczną. Największą wartość posiada dla nas część 1-a. Książka ta cieszy się dużem powodzeniem na Zachodzie (istnieje przekład rosyjski). Autor stoi na stanowisku zasady liczenia i jest gruntownie obeznany z literaturą przedmiotu. Dzieło to, przynajmniej jego część 1-sza, zasługuje, z pewnemi przystosowanemi do naszych warunków modyfikacyami, na spolszczenie. Autor mało się zajmuje kwestyami teoretycznemi. W książce zebrano dużo dobrze opracowanych zadań.

Godną jest również polecenia, poczęści ze względu na dłuższy wstęp historyczny, książka B. Hartmanna p. t. „Der Rechenunterricht in der Volksschule (wyd. 3-e. 1904. Lipsk). W książce tej czytelnik znajdzie szersze i motywowane zastosowanie zasad dydaktycznych szkoły Herbarta do naszego przedmiotu.

Obydwie wspomniane książki mogą mieć dużą wartość dla wykładających, tembardziej że ci sami autorowie opracowali również odpowiednie książeczki dla uczniów.

Z dzieł opartych na badaniach eksperymentalnych warto się zapoznać z książką W. A. Lay'a: „Führer durch den Rechenunterricht der Unterstufe" (wyd. 2-e. 1907. Lipsk), a także z dziełem H. Walsemanna p. t. „Anschauungslehre der Rechenkunst auf experimenteller Grundlage". (1907. Schleswig). W książce Lay'a znajdzie czytelnik treściwy i jędrny wstęp historyczny, a także zwrócenie uwagi na badania sposobów rachunku u ludów pierwotnych, o czem mówi u nas Trybulski.

Dobrą krytykę teoryi „obrazów liczbowych" czytelnik może znaleźć u H. Haase'go: „Zur Methodik des ersten Rechenunterrichts". (Langensalza. 1906).

Prócz tego godzien jest ze wszech miar polecenia poświęcony nauczaniu rachunku rozdział w tomie II-im dzieła Meumanna p. t. „Vorlesungen zur Einführung in die Experimentelle Pädagogik“. Autor stawia tutaj zagadnienie dwóch rozbieżnych kierunków na gruncie objektywnym i bardzo rzeczowym, przypuszcza możliwość pogodzenia.

Nadmienię wkońcu, że proponowane w tej książce przyrządy do poglądowego nauczania produkuje Towarzystwo Urania w Warszawie.

TREŚĆ: